

Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB

Análisis y propuestas

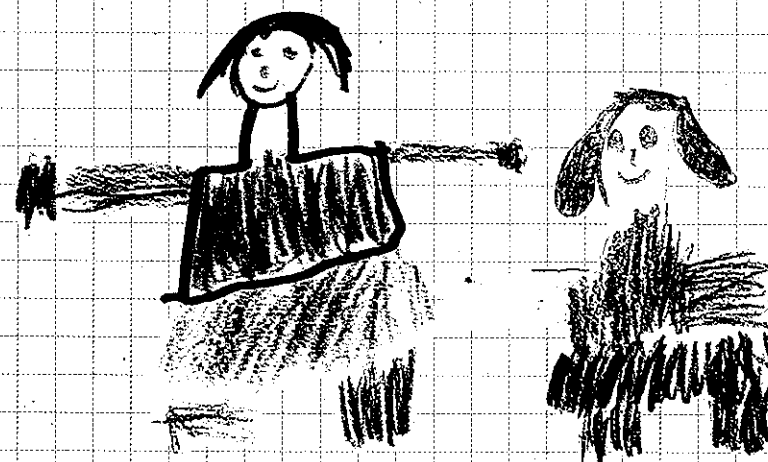
Mabel Panizza (comp.)

Olga Bartolomé / Claudia Broitman

Dilma Fregona / Horacio Itzcovich

María Emilia Quaranta / Beatriz Ressa de Moreno

Irma Elena Saiz / Paola Tarasow / Susana Wolman



**ENSEÑAR MATEMÁTICA
EN EL NIVEL INICIAL
Y EL PRIMER CICLO DE LA E.G.B**



MARÍA CRISTINA GARCÍA
PROFESORA DE MATEMÁTICA

Biblioteca de CUESTIONES DE EDUCACIÓN
Dirigida por María Carmen Delgadillo
y Beatriz Alen

22. L. M. Fernández - *El análisis de lo institucional en la escuela. Obra completa* (4 vols.)
23. E. N. Dabas - *Redes sociales, familias y escuela*
25. S. L. Calvo, A. E. Serulnicoff e I. Siede (comps.) - *Retratos de familia... en la escuela*
26. B. Fainholc - *La interactividad en la educación a distancia*
27. S. Duschatzky - *La escuela como frontera*
28. A. Padovani - *Contar cuentos*
29. M. Krichesky y otros - *Proyectos de orientación y tutoría*
30. A. Malajovich (comp.) - *Recorridos didácticos en la educación inicial*
31. M. I. Bringiotti - *La escuela ante los niños maltratados*
32. M. Libedinsky - *La innovación en la enseñanza*
33. R. Morduchowicz - *A mí la tele me enseña muchas cosas*
34. M. Carozzi de Rojo (comp.) - *Proyectos integrados en la EGB*
35. P. Pineau, I. Dussel y M. Caruso - *La escuela como máquina de educar*
36. J. Imberti (comp.) - *Violencia y escuela*
37. S. Alderoqui y P. Penchansky (comps.) - *Ciudad y ciudadanos*
38. R. Damin y A. Monteleone - *Temas ambientales en el aula*
39. S. Nicastro y M. Andreozzi - *El asesoramiento pedagógico en acción*
40. M. De Cristóforis (comp.) - *Historias de inicios y desafíos*
41. M. Panizza (comp.) - *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB*
42. H. Hochstaet - *Aprendiendo de los chicos en el jardín de infantes*
43. L. Lacreu (comp.) - *El agua. Saberes escolares y perspectiva científica*
44. C. A. Cullen - *Perfiles ético-políticos de la educación*
45. P. Redondo - *Escuelas y pobreza: entre el desasosiego y la obstinación*
46. C. Soto y R. Violante (comps.) - *En el jardín maternal*
47. P. Pineau (comp.) - *Relatos de escuela*
48. G. Gellon, E. Rosenvasser Feher y Golombek, D. - *La ciencia en el aula*
49. S. Rascovan - *Orientación vocacional*
50. P. M. Sarlé - *Enseñar el juego y jugar la enseñanza*
51. S. Carli (comp.) - *La cuestión de la infancia*
52. G. Batallán - *Docentes de infancia*
53. I. Siede - *La educación política*
54. A. Camilloni y otras - *El saber didáctico*

ENSEÑAR MATEMÁTICA
EN EL NIVEL INICIAL
Y EL PRIMER CICLO
DE LA E.G.B

Análisis y propuestas

Mabel Panizza
(compiladora)

Olga Bartolomé • Claudia Broitman
Dilma Fregona • Horacio Itzcovich
María Emilia Quaranta • Beatriz Ressia de Moreno
Irma Elena Saiz • Paola Tarasow • Susana Wolman



Paidós

Buenos Aires • Barcelona • México

Cubierta de Gustavo Macri

372.7 ENS Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB : análisis y propuestas / Olga Bartolomé... [et al.] ; compilado por Mabel Panizza.- 1ª ed. 5ª reimp.- Buenos Aires : Paidós, 2009. 320 p. ; 22x15 cm. (Cuestiones de educación)

ISBN 978-950-12-6141-7

I. Bartolomé, Olga - Panizza, Mabel 1. Matemática-Enseñanza

1ª edición, 2003

5ª reimpresión, 2009

Reservados todos los derechos. Quedan rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del *copyright*, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, incluidos la reprografía y el tratamiento informático.

© 2003 de todas las ediciones,
Editorial Paidós SAICF,
Defensa 599, Buenos Aires
e-mail: difusion@areapaidos.com.ar
www.paidosargentina.com.ar

Queda hecho el depósito que previene la Ley 11.723
Impreso en la Argentina - Printed in Argentina

Impreso en Bs. As. Print,
Sarmiento 459, Lanús, en marzo de 2009
Tirada: 2000 ejemplares

ISBN 978-950-12-6141-7

ÍNDICE

Los autores	11
Prólogo, <i>Cecilia Parra</i>	15
Introducción, por <i>Mabel Panizza</i>	27
1. Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática, por <i>Mabel Panizza</i>	31
1. Introducción	31
2. Acerca de la noción de sentido	32
3. Objetos de conocimiento y representaciones: primera aproximación	33
4. Distintas funciones de las representaciones para los alumnos	41
5. Problemas y cuentas: ¿una falsa diferencia?	44
6. Usos (y abusos) de las representaciones simbólicas	47
7. Enseñanza de los sistemas simbólicos: ¿un regreso al empirismo?	53
8. Síntesis en términos de saberes necesarios	54
Bibliografía	56
2. Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas, por <i>Mabel Panizza</i>	59

1. Introducción	59
2. La didáctica de la matemática de la escuela francesa	60
3. La teoría de situaciones didácticas	60
Bibliografía	71
3. La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel Inicial y el primer año de la EGB, por <i>Beatriz Ressa de Moreno</i>	73
1. Introducción	73
2. Acerca de los diferentes enfoques de enseñanza	74
3. La resolución de problemas	87
4. Los problemas y la enseñanza del número	101
5. Problemas para la enseñanza del número	112
6. Algunas consideraciones acerca de la enseñanza del sistema de numeración	121
7. Algunas consideraciones finales	125
Bibliografía	128
4. El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales, por <i>Olga Bartolomé y Dilma Fregona</i>	131
1. Introducción	131
2. La idea de número natural y la escritura de los números	134
3. El problema de contar	140
4. Diferentes aspectos del número y del conteo en la enseñanza ...	145
5. Los números en un problema de distribución	152
6. A modo de cierre	160
Bibliografía	161
5. Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas, por <i>María Emilia Quaranta, Paola Tarasow y Susana Wolman</i>	163
1. Introducción	163
2. Discutiendo los criterios de la enseñanza usual	166
3. Discusión	182
Bibliografía	187

6. Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute, por <i>María Emilia Quaranta y Susana Wolman</i>	189
1. Introducción	189
2. ¿Qué son los momentos de discusión?	190
3. Momentos de discusión y concepción didáctica	191
4. ¿Por qué las discusiones generan progresos? Algunas razones psicológicas y didácticas	194
5. ¿Cómo organizar momentos de discusión en las aulas?	198
6. Conclusiones	233
Bibliografía	242
7. La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB, por <i>Irma Elena Saiz</i>	245
1. Introducción	245
2. Caracterización de las situaciones planteadas	250
3. Secuencia didáctica: "La granja"	253
4. Sobre la orientación de los objetos	267
5. Secuencia didáctica: "El tobogán"	272
Bibliografía	287
8. Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza, por <i>Claudia Broitman y Horacio Itzcovich</i>	289
1. Introducción	290
2. Desde la geometría que estudia el espacio real hacia la geometría que crea un espacio matematizado	291
3. Entre lo sensible y lo inteligible: una gran variedad de problemas	296
4. Adquirir conocimientos y "un modo de pensar" geométricos como apropiación cultural	299
5. Problemas que permiten iniciar a los niños en el estudio de características de figuras y cuerpos geométricos	304
6. Conclusión	323
Bibliografía	323

LOS AUTORES

OLGA BARTOLOMÉ

Licenciada en Ciencias de la Educación (Universidad Nacional de Córdoba). Profesora en Educación Preescolar (1991). Profesora a cargo del Proyecto de Articulación de sala de jardín-primer ciclo y del proyecto institucional del colegio San José (Córdoba). Docente tutor del postítulo en Formación General en la cátedra de Enseñanza (UNC, 2001). Profesora adscripta a la cátedra Didáctica del Nivel Inicial y Primario de la Escuela de Ciencias de la Educación (UNC). Expositora en una ponencia del área de Matemática en el II Congreso Internacional de Educación (Buenos Aires, 2000).

CLAUDIA BROITMAN

Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA). Miembro del equipo de investigación del Proyecto UBACyT "El sistema de numeración: enseñanza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos", dirigido por Delia Lerner y Flavia Terigi. Miembro del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula, Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Miembro de la Red Latinoamericana de Alfabetización, Equipo de Matemática. Profesora de Enseñanza de la Matemática en el Nivel Inicial, ENS N° 1. Profesora adjunta de Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de La Plata.

DILMA FREGONA

Doctora en Didáctica de la Matemática (Universidad Bordeaux I, Francia). Docente en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física y en la Escuela de Ciencias de la Educación (UNC). Integrante y/o directora, desde 1993, de proyectos de investigación presentados en la FaMAF, subsidiados por la Secretaría de Investigación de la UNC y por la Agencia Córdoba Ciencia. Autora en colaboración de *Matemática 7* (Buenos Aires, Estrada, 1997), libro destinado a alumnos del séptimo año de escolaridad obligatoria, y autora de *El libro del docente. Matemática 7* (Estrada, 1997).

HORACIO ITZCOVICH

Profesor de Matemática (UBA). Miembro del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Profesor de la Escuela de Capacitación Docente (CePA) de la Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Profesor de Enseñanza de la Matemática II, Escuela Normal Superior N° 7, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Integrante del Gabinete Pedagógico Curricular, Dirección de Educación General Básica, Provincia de Buenos Aires (1996-2001).

MARÍA EMILIA QUARANTA

Licenciada en Psicopedagogía (CAECE). Docente de Psicología y Epistemología Genética I (UBA). Miembro del equipo de investigación del Proyecto UBACyT "El sistema de numeración: enseñanza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos", dirigido por Delia Lerner y Flavia Terigi, Facultad de Filosofía y Letras (UBA). Asesora en el área de Matemática de la Dirección de Capacitación Docente, en la Dirección de Educación Inicial, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Capacitadora en el área de Matemática en la Escuela de Capacitación Docente (CePA), Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Docente a cargo del área de Matemática en el marco del Proyecto de Capacitación Docente de la Coordinación Pedagógica e Institucional de la Municipalidad de Hurlingham, Provincia de Buenos Aires.

BEATRIZ RESSIA DE MORENO

Licenciada en Psicopedagogía (CAECE). Asesora en el área de Matemática de la Dirección de Capacitación Docente, en la Dirección de Educa-

ción Inicial, Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Capacitadora en el área de Matemática en la Escuela de Capacitación Docente (CePA), Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Asesora pedagógica en el área de Matemática del Colegio Nuestra Señora de la Unidad, San Isidro, Provincia de Buenos Aires. Realizó asistencia técnica en el diseño, implementación y evaluación del proyecto "Hacia una propuesta de alfabetización en Matemática" dependiente de la RAE, Red de Apoyo Escolar y Educación Complementaria.

MABEL PANIZZA

Licenciada en Ciencias Matemáticas (UBA). Profesora de Didáctica de la Matemática en la Licenciatura en Nivel Inicial de la Universidad de Luján. Profesora asociada del área Matemática en el Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires. Directora del equipo de investigación del Proyecto UBACyT "Didáctica del razonamiento matemático". Integrante del equipo de investigación franco-argentino CESAME, con sede en Niza. Integrante del equipo de especialistas del Programa de Gestión Curricular de la Dirección de Transformación y Acreditación de los Institutos Superiores de Formación Docente de la Provincia de Buenos Aires, Área Matemática (2001).

IRMA ELENA SAIZ

Licenciada en Matemática y Magister en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV del IPN-México, especialista en Didáctica de la Matemática. Profesora de Didáctica de la Matemática en las Universidades Nacionales de Misiones y del Nordeste. Integrante de la Asesoría Técnico-Pedagógica de la Dirección de Planeamiento del Ministerio de Educación de Corrientes. Elaboradora de diseños curriculares nacionales y provinciales. Autora en colaboración de *Hacer matemática 1, 2 y 3* (Estrada, 2001), libros destinados a alumnos de primer ciclo de la EGB, y de las *Guías para el docente*.

PAOLA VIVIAN TARASOW

Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA). Profesora para la Enseñanza Primaria, Escuela Normal N° 2, Ciudad de Buenos Aires. Adscripta a la Cátedra de Didáctica del Nivel Primario (UBA). Miembro del equipo de investigación del Proyecto UBACyT "El sistema de numeración: ense-

fianza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos", dirigido por Delia Lerner y Flavia Terigi, Facultad de Filosofía y Letras (UBA). Profesora de Enseñanza de la Matemática en el Nivel Inicial en el profesorado de formación docente Normal N° 4, Ciudad de Buenos Aires. Profesora de Perspectiva Pedagógica Didáctica en Profesorados de Formación Docente, dependientes de la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Docente del área de Educación Especial, Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires.

SUSANA WOLMAN

Licenciada en Ciencias de la Educación, licenciada en Psicología y Especialista en Didáctica (UBA). Docente de Psicología y Epistemología Genética I (UBA). Miembro del equipo de investigación del Proyecto UBACyT "El sistema de numeración: enseñanza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos", dirigido por Delia Lerner y Flavia Terigi. Coordinadora de EGB, Dirección de Currícula, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

PRÓLOGO

Cecilia Parra

Me resulta un honor prologar este libro escrito por colegas con los que he tenido tantas oportunidades de trabajar, estudiar, pensar y discutir a lo largo de los años y que hoy nos ofrecen, a la comunidad de lectores, un material riquísimo. Me resulta una alegría porque era un obra esperada y necesaria.

¿En qué sentido puede un libro ser "necesario"?

Por supuesto, no en un sentido matemático ni en un sentido social amplio. Nos es "necesario" a los educadores, a quienes estamos preocupados por la enseñanza de las matemáticas, por su papel en los proyectos sociales, por la compleja relación entre teoría y práctica, por el problema de la coherencia entre grandes opciones y el sentido y efecto de cada una de las pequeñas intervenciones que realizamos en las aulas.

Esta obra ha sido proyectada como un puente tendido entre la comunidad de investigadores y la comunidad de educadores. Como Mabel Panizza señala, la mayoría de los autores pertenecen a ambas comunidades. Como lectora considero que a partir de tales condiciones, todos los autores han hecho un remarcable esfuerzo, no sólo para poner a disposición de la comunidad educativa resultados de investigación, sino también para incluir los fenómenos de transmisión de conocimientos *en* la comunidad educativa, someterlos a revisión, alimentarlos teórica y prácticamente y penetrar asuntos escasamente tratados hasta ahora.

Hace unos cuantos años, los esfuerzos parecían estar centrados en acciones de difusión de las primeras proposiciones didácticas —que por momentos tomaba un tinte casi propagandístico, con el riesgo ideologizante que tal tinte supone—; hoy parece posible, y este libro resulta un claro ejemplo de ello, un mayor equilibrio. Alcanzado un cierto nivel de difusión, no se trafa tanto de “dar a conocer” sino de promover revisión, precisión, detección de lagunas, inconsistencias, y son tales actitudes y actividades las que permiten generar nuevas preguntas, intentar respuestas a las muchas no contestadas, abrir debates.

Este doble movimiento, de “revisión y apertura”, que considero que caracteriza a los distintos capítulos de esta obra, puede ser tomado también como un puente tendido entre la comunidad de investigadores y la de educadores, tanto porque representa una práctica fecunda para la investigación y para la educación como por el hecho de que en muchos momentos los autores realizan dicho movimiento interrogando la relación entre los productos de la investigación y las concepciones difundidas en el campo educativo.

En el capítulo 1, “Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática”, Mabel Panizza interroga la noción de sentido, que es, sin duda, una marca de identidad de nuestras preocupaciones y búsquedas en cuanto a la enseñanza de la matemática. Según Charnay, “que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno”.¹ La autora señala que los artículos de esta obra abordan distintas dimensiones de este problema y ella trabaja un eje fundamental: el de las relaciones entre objetos de conocimiento y representaciones. Pese a la enorme importancia que tiene dicho problema en matemáticas y en didáctica de matemáticas, no había sido suficientemente abordado: su tratamiento en esta obra viene a llenar un vacío.

Ser capaz de diferenciar los objetos matemáticos de sus representaciones, comprender las condiciones bajo las cuales una representación funciona como tal, identificar en los procedimientos y representaciones que utilizan los alumnos distintas maneras de tratar y de conocer los objetos y sus representaciones y disponer de conocimientos didácticos para gestio-

1. Charnay, R., “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”, en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.) (1994), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.

nar una enseñanza que los haga evolucionar, son considerados saberes necesarios para realizar una gestión de la clase favorable a la construcción del sentido de los conocimientos por parte de los alumnos. Este artículo constituye un aporte fundamental en tal dirección a raíz de las precisiones conceptuales que provee, las preguntas que retoma, los problemas que plantea.

En el capítulo 2, Mabel Panizza, con una mirada puesta en el conjunto de esta obra y desde una preocupación por proveer los elementos teóricos necesarios para una lectura profunda de la misma, presenta una síntesis organizada de *Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau y analiza cuestiones que han mostrado en la evolución de la teoría o en la experiencia con docentes una necesidad de aclarar o profundizar. Para tal fin incluye ejemplos y señala explícitamente aspectos que han sido objeto de malentendidos o de interpretaciones erróneas. Como señala Panizza, la teoría de situaciones es una teoría compleja. Con la lectura de este capítulo, el lector accederá a un primer nivel de significación de los términos y conceptos en una síntesis que recupera no sólo las primeras formulaciones de Brousseau sino también las que han continuado produciendo el mismo Brousseau y muchos otros investigadores de amplia trayectoria.

Nos referimos antes al movimiento de “revisión y apertura”, y el capítulo 3, “La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel Inicial y el primer año de la EGB”, de Beatriz Ressa de Moreno es particularmente representativo del mismo. La autora realiza un análisis comparativo de distintos enfoques que coexisten en las aulas e instituciones y plantea una discusión en torno a las diferentes concepciones que subyacen a cada enfoque de enseñanza vigente y en términos de cómo es pensada la relación enseñanza-aprendizaje, qué idea de sujeto se sostiene y cómo se define lo que es “saber matemática” en cada caso.

Ajena a la neutralidad, Moreno retoma —para profundizarlo—, el enfoque centrado en la resolución de problemas y aborda el funcionamiento de un aula en dicho marco. Coherentemente con el enfoque que asume se plantea cuáles son los conocimientos sobre número y numeración que construyen los niños más pequeños, cuáles son los problemas que se les pueden plantear, cómo elegirlos y cómo se pueden interpretar las producciones de los alumnos al trabajar frente a tales problemas. A lo largo del trabajo incluye ejemplos, aportes teóricos y un conjunto de reflexiones surgidas de la voluntad de conocer qué sucede en las aulas y de constituirse en acompañante y sostén de quienes deciden emprender nuevos caminos.

La actividad "Vasitos y pinceles" que Olga Bartolomé y Dilma Fregona presentan y analizan en el capítulo 4, "El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales", es probablemente una de las actividades que más se ha difundido —bajo diversas formas, incluso en diseños curriculares—, lo cual es un signo de su "oficialización". Sin embargo, ¿qué se conoce de tal situación didáctica?, ¿en qué se la enmarca? Podríamos lanzar el desafío de preguntar si tal situación corresponde a la función del número como memoria de la cantidad o representa un problema de distribución, y probablemente se nos respondería afirmando lo primero y negando o por lo menos ignorando lo segundo. Si tal cosa sucediera tendríamos evidencia del problema de etiquetar situaciones y del empobrecimiento del conjunto de relaciones que han de ser consideradas para hablar de un conocimiento didáctico consistente.

En tal sentido es que el artículo de Bartolomé y Fregona cobra todo su valor: restituye los marcos necesarios para comprender por qué esas situaciones didácticas conducen a que los niños se encuentren con el conteo y los números naturales.

En primer lugar, las autoras realizan un breve recorrido histórico de las diferentes tendencias en la enseñanza de los números naturales. Luego problematizan la idea de número natural revisando sus supuestos orígenes y distinguiendo la génesis de la noción de número de la génesis de los sistemas de escritura. Abordan detenidamente el problema del contar y diferentes aspectos del número y del conteo en la enseñanza, analizando las relaciones entre las actividades propuestas y los conocimientos necesarios o no para su resolución, no para mover la línea divisoria entre "lo que hay que hacer y lo que no" sino para proveer los elementos de análisis que permiten reconocer qué aspectos de la noción de número se ponen en juego en cada situación de modo de *"tratar de abarcar el concepto ofreciendo a los alumnos una gama de experiencia lo más amplia posible."*²

Con todos estos elementos como marco, presentan las situaciones de distribución en su carácter de situaciones fundamentales para el uso de los números naturales y justifican tal afirmación.

2. Las citas en bastardilla han sido tomadas de los artículos que se comentan en cada caso.

En otro prólogo,³ de hace ya unos cuantos años, decíamos:

Respecto de los materiales que se produzcan dirigidos a los docentes consideramos que deben incluir:

- La fundamentación teórica necesaria para que el maestro conozca el significado de sus opciones y se comprometa con ellas tanto teórica como prácticamente, conozca las dimensiones epistemológicas de lo que está planteando, así como la relación de los alumnos con el conocimiento y la función de ese saber.
- El análisis didáctico suficiente para que el maestro se apropie de la situación y conserve el control sobre ella. Se deben explicitar las variables didácticas que modifican la situación, que son al mismo tiempo aquello sobre lo que el maestro puede actuar y lo que permite analizar y eventualmente explicar lo que sucede.
- Más conocimientos de matemáticas, que le permitan al docente precisar su relación con el saber e interpretar en términos más específicos lo que sucede en el aula.

Eran, sin duda, exigencias muy grandes y es muy elogioso decir que la presente obra las satisface. Incluso podríamos decir que el sentido de varios de los artículos es justamente satisfacer ese conjunto de condiciones allí donde eran detectables pérdidas o ausencias.

En otros casos, se trata de líneas de investigación que han continuado y que están en condiciones de presentar nuevos desarrollos y enriquecer las discusiones vigentes.

El capítulo 5, "Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas" de María Emilia Quaranta, Paola Tarasow y Susana Wolman, ha sido organizado del siguiente modo: los resultados de la investigación se presentan como argumentos en la discusión en torno a tres criterios que atraviesan el trabajo numérico en el Nivel Inicial y el primer ciclo de EGB.

Los resultados de la investigación acerca de las relaciones entre la numeración hablada y la numeración escrita que establecen los niños en sus interpretaciones numéricas son de remarcable interés, pero deseo subrayar que me parece particularmente fecundo haberlos ordenado en función del criterio (o concepción) que discuten. Si se me permite la analogía, funcio-

3. Parra y Saiz, ob. cit.

nan al modo del contraejemplo propio de la matemática. Pero su valor, más que de demostración, reside a mi entender en la posibilidad de sustentar la "discusión interna" que todo docente tiene: los avezados, porque durante muchos años sostuvieron sus prácticas en tales criterios que ordenaban su tarea; los estudiantes y los noveles, porque tienen que dialogar con sus propias experiencias en la escolarización y con aquellas que observan, analizan y comienzan a emprender.

Además, el valor de este artículo reside en que retoma y amplía las investigaciones que Lerner, Sadovsky y Wolman⁴ nos dieron a conocer hace unos cuantos años, de reconocida fecundidad y complejidad. El presente trabajo nos permite una nueva aproximación y avanzar con respecto a declaraciones que en muchos casos se tornaron prescriptivas ("indagar los conocimientos previos", "el valor del error constructivo") pero que no se correlacionan efectivamente con las buscadas prácticas en el aula: tener mucha "oreja" y mucho "ojo" para interpretar las producciones de los alumnos y para ser capaz de mejorar la relación entre lo producido por ellos y el saber que se busca que adquieran. Todos hemos vivido la experiencia de nuestra incapacidad para interpretar ciertos fenómenos antes de contar con elementos teóricos que lo permitan y el asombro de lo que empieza a parecer "evidente" cuando tenemos con qué interpretarlo. Sin duda este artículo colabora ampliamente en tal sentido.

En el capítulo 6, "Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute", María Emilia Quaranta y Susana Wolman parten de una constatación: en general se admite la necesidad de generar, en algún momento de las clases, "puestas en común" pero, al mismo tiempo, no resulta para nada claro por qué o para qué son tan relevantes y menos claro todavía resulta el modo en que deben ser organizadas y conducidas. Frente a tal reconocido e importante problema las autoras emprenden una doble tarea: por un lado, proveen una sólida argumentación teórica respecto del papel de los momentos de discusión en la concepción didáctica de base y de las razones psicológicas y didácticas por las cuales tales discusiones generan progresos; por otro lado, realizan un minucioso análisis de registros de clases de primer ciclo centrados en algunas condiciones didácticas de

4. Lerner, D.; P. Sadovsky y S. Wolman, "El sistema de numeración: un problema didáctico", en Parra y Saiz, ob. cit.

las discusiones en el aula, en particular en relación con las intervenciones del maestro.

La opción realizada consistente en responder al "¿cómo?" a través de un análisis casuístico se fundamenta en que "No es posible definir un modo general de organizar estos espacios válido para todas las ocasiones...". Esta última afirmación permite plantear el siguiente problema reconocido por formadores y capacitadores: ¿Cómo se enseña a gestionar una puesta en común? ¿Existe un tipo de experiencia ideal para tal aprendizaje? Se puede pensar que consiste en la situación del aprendiz de artesano en un taller en el que hay maestros que dominan aquello que es objeto de enseñanza. Se aprende del maestro, se aprende junto al maestro, se aprende haciendo y revisando lo que se ha hecho junto a alguien que promueve la reflexión. Ocasionalmente, en la formación inicial o en distintas formas de capacitación y acompañamiento en las escuelas se produce tal experiencia ideal. Pero otras formas de trabajo sobre estas cuestiones son necesarias por el doble motivo de que no siempre son posibles y porque aun cuando lo sean, son insuficientes si el aprendiz no cuenta con elementos teóricos que enriquezcan y posibiliten su reflexión y con oportunidades de realizar muchas y diversas prácticas en dirección a adquirir esa capacidad compleja que es provocar y conducir los momentos de discusión en la clase.

El artículo de María Emilia Quaranta y Susana Wolman nos provee un material riquísimo porque permite una aproximación teórica y práctica a "la organización sistemática de instancias de discusión en la clase" que ocupa un lugar insustituible en el aprendizaje matemático de los alumnos y un lugar delicado y crucial en la formación y acompañamiento de docentes.

Somos muchos los que iniciamos nuestras primeras revisiones críticas en torno al trabajo relativo al espacio en el Nivel Inicial y al primer ciclo de la EGB analizando y llevando adelante la secuencia didáctica "La granja", creada y difundida por Irma Saiz-hace ya mucho tiempo. Esta situación se convirtió en arquetípica y sin embargo no contábamos hasta ahora con su "puesta en texto". En el capítulo 7, "La derecha... ¿de quién? Ubicación espacial en el Nivel Inicial y primer ciclo de la EGB", Irma Saiz aborda el problema de la adquisición de conocimientos espaciales por los sujetos, sintetiza los cuestionamientos más recientes a las perspectivas psicológicas clásicas y presenta el problema didáctico de la enseñanza relativa a espacio tanto en términos de su delimitación (¿cuáles son los aprendizajes que la

escuela debe favorecer “que permitan ir más allá de lo que las actividades cotidianas o juegos les permiten construir”?) como en términos de su caracterización (¿cuáles son las condiciones que deben satisfacer las situaciones didácticas?).

Plantea y desarrolla dos situaciones en las que se trata “de organizar un proceso de elaboración colectiva de conceptualizaciones respecto a la organización del espacio (en el caso de la primera secuencia) y de orientación de objetos (en el segundo caso) donde la representación del espacio tenga un carácter funcional, es decir, que se ponga al servicio de una tarea de comunicación de posiciones”.

En ambos casos la autora presenta el análisis a priori de las secuencias y el análisis de su realización en las clases. Resulta, por esto, un aporte fundamental para quienes desean conocer cómo se realiza la investigación desde la perspectiva de la ingeniería didáctica.

Celebramos esta “puesta en texto” que ordena y enriquece las múltiples notas que tomamos a lo largo del tiempo todos los que hemos tenido oportunidad de aprender de Irma Saiz y que le restituye a las situaciones el marco necesario para constituir conocimiento didáctico consistente.

Como hemos dicho, los distintos autores de esta obra han sabido detectar aspectos nodales que requerían tratamiento y nos brindan muy importantes aportes. Pero entre ellos deseo destacar el trabajo de Claudia Broitman y Horacio Itzcovich en el capítulo 8, “Geometría en los primeros grados de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza”, porque en el mismo, sus autores se han adentrado en un campo sumamente problemático, plagado de incertezas, en el que la ausencia de bibliografía es absolutamente constatable y para cuyo abordaje hacía falta un coraje intelectual que ellos han sabido tener.

Los autores presentan algunas características de los orígenes del conocimiento geométrico y su posterior evolución histórica como disciplina, caracterizan tipos de problemas según los conocimientos involucrados, los procesos de adquisición y las posibilidades de intervención pedagógica y a partir de este marco abordan la discusión sobre la finalidad de la enseñanza de la geometría. Asumiendo una posición definen dos objetivos a los que podría apuntar la enseñanza de la geometría: “Por una parte, a la construcción de conocimientos cada vez más próximos a ‘porciones’ de saber geométrico elaborados a lo largo de la historia de la humanidad. Y, en segundo lugar, y tal vez sea lo más importante, al

inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico. Ambos objetivos están estrechamente imbricados”.

Es conocido el desafío didáctico que supone tal posición de cara al conjunto de la escolaridad. Broitman e Itzcovich plantean y enfrentan tal desafío con relación al primer ciclo a través del análisis didáctico de algunos problemas que favorecen el avance de los conocimientos de los alumnos sobre las propiedades de los cuerpos y figuras en los primeros años de la escuela primaria. Los autores señalan explícitamente los límites del primer ciclo en tal sentido y son conscientes de haber planteado un conjunto de afirmaciones que pueden resultar controvertidas. Podemos decirles que su intención expresa de contribuir al necesario y pendiente debate ha sido cumplida. Nos han hecho un importantísimo aporte, tanto en términos del análisis que realizan y los argumentos que proveen, como en términos de proposición didáctica, lo cual permite que juguemos el debate considerando en qué posición son pensados los sujetos —su relación con el conocimiento y el conocimiento mismo— en cada concepción de educación matemática y en qué medida cada acto de enseñanza hace posible o no tales posiciones.

No es sólo este último capítulo el que aporta y promueve tal debate. Todos ellos lo hacen. Todos ellos contribuyen al carácter de “necesaria” con el que me refiero a esta obra. Es necesaria para todos los que asumimos que trabajar por una educación que enfrente las desigualdades sociales y reconozca el derecho de todos los sujetos a construir una relación autónoma y fecunda con el saber requiere de un diálogo constante entre las formulaciones políticas y académicas, teóricas y prácticas, generales y específicas, provisorias y certeras, que vamos siendo capaces de producir desde la voluntad de conocer lo que es enseñar y aprender matemáticas, pero también —y quizás sobre todo— desde la voluntad política de actuar en las aulas, en las escuelas para que aprender matemáticas deje de ser, como en tantos casos es, una progresiva alineación y pase a ser, para cada alumno, una experiencia de afirmación de sí mismo como aprendiz de la cultura y actor social.

Para cerrar, deseo compartir una cita de Bkouche,⁵ que nos permite vincular la pregunta por el sentido de los conocimientos matemáticos con la pregunta por el sentido de sí mismo que los sujetos construyen cuando aprenden, vínculo largamente interrogado en esta obra.

5. Bkouche, B.; B. Charlot y N. Rouchen (1991), *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, París, Armand Colin.

La actividad matemática, aquella que los matemáticos han desarrollado durante siglos, aquella a la que queremos introducir a los niños [...] es construcción de un mundo matemático por un sujeto. Es actividad de un sujeto, que no es ni receptor de verdades eternas ni espectador de un mundo pintoresco, sino actor de su saber. Es construcción de un universo matemático, abierto pero estructurado: ni actividad justificada por sí misma como el juego, ni recolección a merced de encuentros curiosos, sino creación-conquista de un mundo por un sujeto [...]. Lo propio de un objeto matemático no es ser "curioso" o "útil", sino ser correlativo a otros objetos en los conjuntos conceptuales creados por el pensamiento humano para responder a preguntas y animar al pensamiento a plantearse nuevas preguntas. Lo propio del pensamiento matemático no es ni la sumisión rigurosa a las reglas impuestas por los objetos, ni la libertad de creación característica del juego, sino la sumisión a las reglas que él mismo ha creado al construir sus objetos, la creación constante de nuevos objetos implica la construcción de reglas. [...]

Ahora bien, lo que da profundamente sentido en la actividad matemática, no es que es curiosa, útil, entretenida, sino que se enraiza en la historia personal y social del sujeto. Toda situación de aprendizaje, más allá de aspectos específicamente didácticos, plantea dos preguntas incontorneables. ¿Cuál es el sentido de esta situación para aquel que aprende? ¿Cuál es la imagen de sí mismo, de sus capacidades, de sus oportunidades de éxito en esta situación? En términos más triviales: ¿qué hago acá?, ¿soy capaz?, ¿vale la pena? Esta relación con el saber pone en juego los deseos, el inconsciente, las normas sociales, los modelos de referencia, las identificaciones, las expectativas, los pareceres sobre el porvenir, los desafíos personales. El sentido está ahí; determina o no la implicación en un proceso de aprendizaje y es muy reductor invocar simplemente aquí palabras tan vagas como "curiosidad" o incluso "motivación". El problema no es "suscitar la curiosidad", sino proponer a los jóvenes las actividades, las prácticas, los itinerarios de formación que toman sentido en una red compleja de deseos, de expectativas, de normas interiorizadas y que contribuyen a reestructurar esa red.

Hay, yo creo, una motivación más fundamental que la utilidad: el desafío que plantea al alumno el problema en tanto tal. Lo que es importante para el alumno no es conocer la solución, es ser capaz de encontrarla él mismo y de construirse así, a través de su actividad matemática, una imagen de sí positiva, valorizante, frente a las matemáticas. La recompensa del problema resuelto no es la solución del problema, es el éxito de aquel que lo ha resuelto por sus propios medios, es la imagen que puede tener de sí

mismo como alguien capaz de resolver problemas, de hacer matemáticas, de aprender.

La imagen de sí frente a las matemáticas, y, más generalmente, frente al saber y a la escuela, frente al mundo adulto y al porvenir: es un asunto terriblemente serio que no hay que contornear hablando de juego o de rentabilidad inmediata de las matemáticas. Este asunto es psicológico, muy profundamente, y cultural, porque ¿qué es la cultura, sino la capacidad de situarse como autónomo, activo y creador en el mundo que nos rodea? Este asunto es también social y político. Frente a las estadísticas, a los sondeos, a los índices, a la utilización cada vez más frecuente del argumento matemático en el discurso social y político, no es algo sin importancia que los alumnos conciban las matemáticas como un universo muy particular que no es accesible más que a unos pocos o como una actividad que engendra sus resultados según ciertas reglas verificables por todos. ¿Educación cívica a través de las matemáticas? Sin duda, dado que el aprendizaje de las matemáticas reposa sobre una epistemología implícita que define al hombre frente al saber, a la cultura, a la historia y a los otros hombres.

Bkouche termina haciendo una apelación:

Los docentes de matemáticas están, y lo estarán cada vez más, confrontados a una doble cuestión. ¿Pueden ellos, más allá de las distorsiones ideológicas y pedagógicas sufridas por la enseñanza de su disciplina, reencontrar las raíces epistemológicas e históricas e inscribir sus enseñanzas en un proyecto de apertura del espíritu, de toma de conciencia del poder creador del pensamiento humano? ¿Pueden hacerles compartir al 80 % al menos de los jóvenes su gusto por las matemáticas? La respuesta a estas dos cuestiones compromete el porvenir de la enseñanza de matemáticas en Francia.

En la Argentina, ¿podremos? ¿Podremos en un país en progresivo deterioro, en el que hay hambre, no hay trabajo, en el que tantas familias están encontrando enormes dificultades para sostener el proyecto educativo que acucian para sus hijos y en el que el Estado defecciona de tantos modos en el sostenimiento de tales proyectos y de las condiciones básicas requeridas?

Personalmente no sé qué podremos pero sé qué debemos: debemos ser conscientes de las urgencias, de las impostergables necesidades de la gente, pero debemos, a la vez, humildemente, sostener la convicción de que el empeoramiento de las condiciones no resta importancia ni ha de postergar nuestro trabajo en aquello de lo que hemos decidido, junto a otros, ocupar-

nos: la educación, y aun una parte de ella: la educación matemática, y más recordado aún: los primeros contactos de los niños con la enseñanza matemática (el objeto de esta obra), conscientes de que hay una red infinita de sentidos que se van construyendo y que luchan contra las determinaciones o no lo hacen.

INTRODUCCIÓN

Mabel Panizza

El problema de lograr que los resultados de investigación en enseñanza de la matemática tengan impacto en el sistema educativo es reconocido en el orden internacional. Sin embargo, investigadores y educadores de diferentes países compartimos la idea de la existencia de dos comunidades, una de investigadores y otra de educadores, comunidades distanciadas en más de un sentido.

Es interesante puntualizar que en el caso particular de esta área de conocimiento, la distancia entre ambas comunidades no se debe —como podría ser el caso de otras áreas— a una falta de relación entre los problemas de investigación y los problemas educativos. Por el contrario, la didáctica de la matemática aborda problemas de interés directo para el sistema educativo. No obstante, aunque el común centro de interés pueda crear la ilusión de una comunicación natural entre ambas comunidades, cada una tiene maneras específicas de funcionamiento; posibilidades particulares de acceso al conocimiento; códigos, creencias y expectativas propios; etcétera. Esto significa que la posibilidad de comunicación entre individuos y grupos requiere de un esfuerzo de acomodación de ambas partes. Significa también que esa comunicación no se establece mediante un mero acto de voluntad.

En la Argentina conocemos esfuerzos de ambas partes. Por un lado, existen foros de discusión y proyectos de trabajo institucionales y regionales, y

los docentes buscan acceder a espacios de capacitación y de reflexión, a documentos innovadores, artículos de investigación, libros de texto, etcétera. Por otro lado, los investigadores participan de proyectos de formación y de capacitación, de proyectos curriculares, etcétera. Sin quitarle mérito a estas acciones, pensamos que su éxito es la mayor parte de las veces local. Afortunadamente, este carácter local no escapa a la conciencia de los actores, que de ambas partes manifiestan la necesidad de acceder a otras vías de comunicación.

La obra que presentamos se inscribe en el reconocimiento de esta problemática. Sin pretensión de reemplazar por este medio particular planes y acciones que requieren sin duda de otros medios de comunicación y de acción, hemos proyectado este libro como vía de comunicación entre ambas comunidades. La idea central ha sido la de producir un material destinado a docentes y personas en formación. En particular, esperamos que constituya un elemento de referencia en acciones de formación y capacitación. Pensamos que el perfil de los autores es garantía para el logro de este objetivo en la medida en que en su mayoría son tanto educadores como investigadores.

Los artículos contienen análisis de situaciones didácticas, informes de investigación y análisis de registros de clases, a propósito de adquisiciones numéricas (número y sistema de numeración) y a propósito de nociones espaciales y conceptos geométricos, correspondientes al Nivel Inicial y al primer ciclo de la EGB.

Un punto importante que hemos tenido en cuenta ha sido la necesidad de precisar el sentido de los términos que se utilizan, situándolos en referencia al marco teórico particular que les corresponde. Esta necesidad se agudiza en la medida en que en el sistema educativo los términos se difunden de manera tal que son utilizados como si tuvieran un sentido único y compartido, fenómeno que influye directa o indirectamente en una inadecuada interpretación de propuestas curriculares, de informes de investigación, etcétera. Ejemplos especialmente elocuentes de este fenómeno son la utilización de expresiones tales como "adquisición del sentido", "problema significativo", "discusión", "actividades", "compartir procedimientos". En relación con la posibilidad de comunicación que hemos comentado, este aspecto ha sido considerado cuidadosamente.

Otro punto esencial que ha animado la constitución de esta obra ha sido la de lograr que los conceptos teóricos se integren a la práctica educativa de los lectores. Para ello, hemos considerado importante ofrecer análisis

comparativos de propuestas didácticas sustentadas en distintos enfoques de enseñanza y análisis de registros de clase. De esta manera, al favorecer el análisis crítico de distintas corrientes de enseñanza en términos de alcances y limitaciones de modelos teóricos, pensamos que contribuimos tanto a dotar de significación a dichos modelos como a disponer de elementos para elegir de manera plenamente consciente entre las diferentes propuestas y para analizar y mejorar la propia práctica.

REFLEXIONES GENERALES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Mabel Panizza

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones didácticas y las preocupaciones actuales de los docentes expresan claramente una problemática central: no es posible tratar el tema del aprendizaje y de la enseñanza de la matemática sin referirse seriamente a la cuestión del sentido. Los artículos de este libro abordan distintas dimensiones de este complejo problema: los análisis de las situaciones didácticas que se presentan, de las formas de organización de la clase, de las intervenciones docentes, etcétera, hacen referencia a distintas acepciones de la noción de sentido, a las condiciones adecuadas para su adquisición y a sus aspectos constitutivos. En este capítulo introductorio presento una visión de cuestiones generales abarcativas de esas dimensiones a través del desarrollo de un eje fundamental de la enseñanza de la matemática: el de las relaciones entre objetos de conocimiento y representaciones, articulado con el de la adquisición del sentido en matemática. Se trata de dos aspectos importantes para una didáctica que tenga en cuenta tanto la especificidad del nivel en el que se desarrolla la enseñanza como los aprendizajes a lograrse a largo plazo a través de los diferentes niveles de la escolaridad.

2. ACERCA DE LA NOCIÓN DE SENTIDO

Pocos conceptos han dado tantos problemas a los filósofos como el concepto de sentido. A pesar de numerosas tentativas para encuadrarla dentro de teorías, esta noción parece siempre escapárseles, en definitiva. Esto provendría de que toda teoría proponiéndose tratar el sentido en general se refiere necesariamente a ella misma: cualquier definición de la noción de "sentido" tiene ella misma un sentido. En consecuencia, muy pocos filósofos han tratado de considerar el sentido en toda su generalidad; la mayoría se ha interesado preferentemente en el sentido de diferentes cosas y se ha dedicado a diversos aspectos del sentido.

SIERPINSKA, 1995

La palabra "sentido" parece estar cada vez más presente en las preocupaciones de los docentes acerca la enseñanza de la matemática. "¿Cómo lograr que los alumnos encuentren *el sentido* de la actividad matemática?", "Los alumnos operan mecánicamente sin atribuir *sentido* a lo que hacen", entre otras, son expresiones habituales de los docentes. La palabra "sentido" parece explicar intenciones, logros y frustraciones. Sin embargo, cuestiones tales como qué significado se atribuye a la palabra, dónde se encuentra el sentido, si es algo que el docente *da* o el alumno *construye* y en qué condiciones, lejos de ser claras y compartidas conllevan profundas diferencias y contradicciones.

Si con la palabra "sentido" se intenta iluminar fenómenos y procesos de aprendizaje y de enseñanza y que el término se incorpore coherentemente al lenguaje de los educadores, es importante reconocer la necesidad de sobrepasar el significado común del término en castellano. La cuestión no es sencilla. Tal vez una buena forma de comenzar sea —a la manera de los filósofos— dejar de considerar el sentido en general, y preguntarse por sus diferentes aspectos.

Como señala Drouhard (1995) al analizar las distintas acepciones de la palabra "sentido" utilizadas por los didactas de la escuela francesa:

[...] los diferentes autores utilizan la palabra ["sentido"] con acepciones extremadamente diferentes. Para caracterizarlas, hay que remarcar que la palabra "sentido" no interviene aisladamente, sino en general acompañada por otra palabra: "concepto", "actividad", "conocimiento", "saber", "escritura", etcétera. Debemos entonces hacernos cada vez la pregunta: "¿sentido de *qué*?"

Efectivamente, Brousseau (1983) define el sentido de un conocimiento; Vergnaud (1991) el sentido de un concepto; Duval (1995) define las diferentes componentes del sentido de una proposición —dentro del marco más amplio de las representaciones semióticas, discursivas y no discursivas—; Laborde (1991) identifica elementos constitutivos del sentido de un problema; etcétera. En este libro tendremos en cuenta algunas de estas definiciones y las de otros autores,¹ y las iremos introduciendo en los apartados siguientes y en otros capítulos, en momentos oportunos relacionados con distintas dimensiones de la adquisición del sentido en matemática. La intención de este apartado no es la de tratar el problema del sentido en profundidad, sino la de abrir la problemática e invitar a retener dos ideas principales: al hablar del sentido, buscaremos precisar cada vez el "sentido de *qué*", e identificar sus aspectos constitutivos. Es importante que también el lector centre su atención en estos aspectos cada vez que se encuentre con la palabra "sentido" en esta obra.

3. OBJETOS DE CONOCIMIENTO Y REPRESENTACIONES:
PRIMERA APROXIMACIÓN

Ante la pregunta "El número $18/3$, ¿es entero?", Juan (17 años), responde: "¡No! Es un número racional, porque es un cociente de dos enteros".

Juan sabe reconocer un número racional en su expresión fraccionaria. Sin embargo, la escritura parece inhibirle la capacidad de ver que $18/3$ no sólo es un número racional, sino que además es un número entero (porque $18/3$ es igual a 6). El caso de Juan —que confunde el número con su representación (fraccionaria), que atribuye al número una propiedad de la notación utilizada para describirlo— es representativo de lo que ocurre con la mayoría de los alumnos que terminan la escolaridad obligatoria. En términos más generales, se trata de una *primacía de la forma sobre el contenido* que produce una identificación del *objeto de conocimiento con su representación*.

1. Hemos intentado, en la medida de lo posible, hacer referencia a artículos editados en castellano. En el caso de bibliografía en otro idioma, la traducción ha estado a cargo de los autores de cada capítulo.

En 1891, Frege decía:

La inclinación bastante extendida actualmente de no reconocer como objeto lo que no puede ser perceptible con los sentidos induce a tomar los signos numéricos por los números [...] (Frege, 1974).

Esta idea expresada con tanta claridad es fecunda en relación con la matemática en general, ya que los objetos matemáticos, por su naturaleza, no son perceptibles mediante los sentidos: el numeral "2" no es el número 2, sino una representación de éste; un dibujo de un cuadrado es una de las infinitas representaciones del cuadrado como objeto geométrico ideal, etcétera. Se trata de un problema sin duda importante a la hora de enseñar matemática. Hay que tener presente que, por un lado, están los conceptos, las propiedades de los *objetos matemáticos*, y por otro, las *representaciones* que se utilizan en matemática. Teniendo en cuenta esta particularidad señalada por Frege, ¿qué cuestiones habría que plantearse sobre estos aspectos y sus relaciones?

En primer lugar, para tratar este problema de relaciones entre objetos y representaciones es necesario cuestionar la noción misma de representación. Se trata de una noción que suele estar presente pero, en general, de manera confusa en las reflexiones sobre el tema, y evidentemente es fundamental. A propósito, Duval (1993) se pregunta bajo qué condiciones un numeral o un dibujo, por ejemplo, funcionan como representaciones de los objetos matemáticos correspondientes (número y figura, respectivamente), y afirma:

[...] es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado.

La dificultad de lograr la primera de las condiciones establecidas por Duval, "que el objeto no sea confundido con sus representaciones", es a lo que Frege ya había hecho referencia —en el dominio numérico— al hablar de la tendencia a tomar los signos numéricos por los números. Se trata de una condición especialmente difícil de cumplir al trabajar en matemática, en virtud de que, como ya señalamos, los objetos matemáticos no son perceptibles a través de los sentidos.

La segunda condición —no menos difícil de lograr— establece que el objeto debe ser "reconocido en cada una de sus representaciones". Así, por ejemplo, es necesario que al terminar la escolaridad un alumno pueda reconocer el número 6, no sólo en el numeral "6" sino también en las expresiones " $18/3$ ", " $4 + 2$ ", " $5 + 1$ " o " 2×3 ".

Juan, por ejemplo, *no* reconoce el número 6 en la expresión " $18/3$ ", en tanto afirma que " $18/3$ " no es un número entero.

El logro de estas dos condiciones por parte de los alumnos es una de las primeras cuestiones a proponerse como objetivo a largo plazo, y requiere actividades específicas de enseñanza. Para trabajar desde esta perspectiva, es fundamental en primer lugar que el docente profundice en su propia capacidad para diferenciar los objetos matemáticos de sus representaciones y que comprenda las condiciones bajo las cuales una representación funciona como tal. Asimismo, es importante que identifique en los procedimientos y representaciones que utilizan los alumnos distintas maneras de tratamiento y de conocimiento de los objetos y sus representaciones.

3.1. Objetos matemáticos y representaciones usadas por los alumnos

En primer lugar, es importante reconocer que muchos procedimientos de los chicos indican que ellos —implícitamente— son capaces de reconocer muy tempranamente los objetos matemáticos en algunas de sus distintas representaciones. Para ello, nos valdremos de una primera acepción de la palabra "sentido", que le debemos a Frege (sentido de una *expresión*) y que resulta fructífera para interpretar los procedimientos de los alumnos.

Frege, en 1892, para dar cuenta de que distintas expresiones (en nuestro ejemplo: " $18/3$ ", " $4 + 2$ ", " $5 + 1$ " o " 2×3 ") corresponden a distintas interpretaciones y perspectivas del mismo objeto (6), introduce una diferencia fundamental al postular que las expresiones tienen una *referencia* (en alemán: *Bedeutung*, traducido también por "significado", o "denotación") y además un *sentido* (en alemán: *Sinn*) (Frege, 1974).

La "referencia" (o significado, o denotación) de una expresión es el objeto que la expresión designa, en tanto que el "sentido" tiene en cuenta la *manera* en que la expresión designa el objeto. De acuerdo con esta distinción, " $18/3$ ", " $4 + 2$ ", " $5 + 1$ " o " 2×3 " *significan* (o *denotan*, o *designan*)

el mismo número, el 6, pero tienen *sentidos diferentes* en tanto son diferentes maneras de obtener dicho número.

De la misma manera “3 + 42” “42 + 3” “10 + 10 + 10 + 10 + 3 + 2” *significan* (o *denotan*, o *designan*) el mismo número, el 45, pero tienen *sentidos* diferentes.

¿Por qué decimos que esta distinción entre “sentido” y “significado” permite interpretar producciones de los alumnos que los docentes observan en su práctica diaria?

Veamos un primer ejemplo. Todos sabemos del procedimiento de los chicos, cuando, para calcular “3 + 42” dicen: “43, 44, 45”. Ellos —en ese caso— realizan sobreconteo, “dejando el 42 en la cabeza”. Este procedimiento lleva *implícitas* dos cuestiones fundamentales:

- el reconocimiento de que “3 + 42” y “42 + 3” son dos *formas diferentes* de obtener el resultado: según Frege, que “3 + 42” y “42 + 3” designan el mismo número (el 45);
- la *elección* de una de las dos formas para realizar la operación (cambio de “sentido” según Frege).

Naturalmente, para algunos chicos —los que dominan los algoritmos convencionales u otros intermedios— los cálculos “3 + 42” y “42 + 3” revisten la misma complejidad. Pero para el caso que analizamos, en la capacidad para “elegir cambiar de sentido” (es decir, la manera de calcular) reside la *posibilidad* de realizar la operación. De hecho, “ponerse el 3 en la cabeza” y realizar sobreconteo sabemos que es muy costoso, o aun impracticable para los más chiquitos.

Vemos entonces que si bien la expresión “3 + 42” sugiere un “sentido”, una manera de calcular la suma, estos chicos eligen cambiar de expresión hasta llegar a algo cuyo “sentido” (según Frege) les sugiere una manera fácil (o posible) de realizar la operación. Este cambio de expresión es significativo, en tanto les permite resolver el problema con los recursos de los que disponen.

Notemos también que esta inversión se basa en una *propiedad de las operaciones* (la conmutatividad de la suma) y *no depende del sistema de numeración* utilizado (sistema decimal, romano u otro). Es decir que esta primera forma que analizamos de calcular la suma utiliza una propiedad del objeto de conocimiento e independiente de su representación.

Veamos otro ejemplo. Cuando para calcular esa misma suma “3 + 42” los chicos hacen:

$$\begin{array}{r} 3 + 42 = \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ 3 + 40 + 2 = \\ \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ 40 + 5 = 45 \end{array}$$

también están utilizando diferentes maneras de designar el número 45. Esta vez el procedimiento utilizado —sea o no por escrito— se basa en propiedades de los números y las operaciones, y también en la descomposición aditiva, propiedad del sistema de numeración decimal. Es decir que esta segunda forma de calcular la suma utiliza propiedades del objeto de conocimiento y propiedades específicas de su representación.

Al comparar ambos procedimientos, vemos que aunque el modo de producción del cálculo sea diferente según si el tratamiento sobre los símbolos se realiza por escrito o internamente (“mentalmente”), ambos mecanismos se basan en una “elección”: cambiar de “sentido” (según Frege) para poder operar. Lo que es importante ver en dichos procedimientos es que, de manera implícita o explícita, sin soporte exterior o con soporte en los dedos o por escrito, desde los primeros aprendizajes los chicos utilizan *distintas representaciones de un mismo objeto* para realizar operaciones numéricas y “lo reconocen [al menos implícitamente] en cada una de ellas”. ¿Por qué razón más adelante pierden esta capacidad y —como Juan—, identifican el *objeto* con la *representación*, el *contenido* con la *forma*?

La respuesta a esta pregunta necesariamente contiene consideraciones sobre múltiples aspectos de la enseñanza y del aprendizaje, algunas de las cuales abordaremos en este capítulo. Uno de estos aspectos, que desarrollaremos a continuación, consiste en comprender que estas producciones que analizamos son manifestaciones de una *manera de conocer* de los alumnos y, en consecuencia, concierne a la responsabilidad didáctica hacerlas evolucionar.

3.2. Interpretación de las producciones de los alumnos en términos de conocimientos

La tradición escolar no reconoce las representaciones utilizadas por los alumnos desde el inicio de la escolaridad como indicativas de una *manera* de conocer los objetos y las representaciones formales (en relación con el ejemplo que venimos desarrollando, manera de conocer los números [objeto] y el sistema de numeración [representación]). En consecuencia, las propuestas didácticas –aun reconociendo la importancia de “partir de lo que los niños ya saben”– no aciertan a gestar una evolución de dichos conocimientos.

Es que este principio general de fácil enunciación (“partir de lo que los niños ya saben”) requiere, naturalmente, tener conocimiento acerca de lo que los niños saben, y esto no es tan fácil como parece.

Por ejemplo, al analizar los procedimientos de los alumnos presentados en el inciso anterior, el lector podría preguntarse: “¿Pero, entonces, los chicos ya *saben* las propiedades asociativa y conmutativa de la suma?”. Y naturalmente se respondería que no cabe pensar que los chicos de estas edades conocen estas propiedades de manera de poder enunciarlas, ni que ello sea objeto de enseñanza en estos primeros niveles de escolaridad. Sin embargo, como vimos, estas propiedades de los números *funcionan de manera implícita* en los procedimientos analizados, lo que se manifiesta por el uso de *expresiones diferentes del mismo número*. ¿Significa esto un *conocimiento* por parte de los alumnos?

Para responder a esta pregunta es especialmente fecunda la noción de “teorema en acto” de Vergnaud (1996), que da cuenta de ciertos conocimientos matemáticos implícitos que los alumnos utilizan en la acción:

Un teorema en acto es una proposición que es considerada como verdadera por un sujeto individual para un cierto rango de situaciones variables.

De acuerdo con esta definición, los procedimientos analizados anteriormente son indicativos de que los alumnos *conocen* “en acto” las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para las cantidades utilizadas. Dicho de otro modo, para estos alumnos el cálculo de la suma con las cantidades consideradas está dentro del “rango de situaciones variables” donde dichas propiedades son consideradas verdaderas por ellos. Cuando el docente puede

reconocer estos conocimientos en acto en los alumnos, comienza a visualizar el papel fundamental que poseen en el proceso de aprendizaje de los conceptos, algoritmos y representaciones convencionales. En consecuencia, comienza también a estar en condiciones de “partir de esos conocimientos” y de planificar intencionalmente oportunidades para que los alumnos desplieguen representaciones y procedimientos no convencionales, establezcan la validez de los mismos, analicen los que son pertinentes, abandonen unos, elijan otros.

Esto nos conduce a retomar el problema del sentido, en relación con el lugar que ocupan esos procesos en el aprendizaje de conceptos y representaciones formales desde una perspectiva constructivista del aprendizaje. Es el momento oportuno para reconocer, en el valor que otorgamos a este tipo de procesos, el marco orientador que debemos a Brousseau (1983), para quien el *sentido de un conocimiento* se define:

[...] no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etcétera. (Citado por Charnay, 1994a).

Los procesos antes mencionados resultan –de acuerdo con esta definición– *parte constitutiva del sentido de los conocimientos*. Una enseñanza de la matemática que se ubique en una perspectiva constructivista debe favorecer espacios para dichos procesos. Una condición necesaria, aunque no suficiente, para una tal perspectiva didáctica es la posibilidad de reconocer en los alumnos distintas maneras de conocer (implícitas, conscientes, explícitas) relacionadas con un saber matemático, y considerarlas constitutivas del sentido de los conocimientos que construyen.

3.3. Primeras conclusiones para la enseñanza de la matemática

El análisis realizado hasta aquí contiene elementos de tres aspectos que la investigación cognitiva y didáctica ha identificado de manera casi simultánea y en paralelo, fundamentales para abordar el problema de la adquisición del sentido en matemática: la existencia de distintas maneras de conocer (implícitas, conscientes, explícitas); el reconocimiento –en tér-

minos de hipótesis— acerca de qué y cómo conocen los alumnos a partir de los procedimientos y representaciones que utilizan; la identificación del uso de procedimientos y representaciones no convencionales y de su evolución en la construcción del conocimiento.² En la escuela, los resultados de estas investigaciones han comenzado a manifestarse, pero con distinto grado de protagonismo.

Por ejemplo, en los últimos años, la escuela está reconociendo la importancia de permitir que los alumnos desplieguen *procedimientos no convencionales*, en contraposición con la postura más tradicional, que pretendía enseñar directamente los procedimientos formales. Al considerarlos como constitutivos del saber formal, se promueven prácticas para que estos procedimientos tengan lugar en el aula, para que emerjan, se analicen, etcétera, antes de enseñar los algoritmos convencionales, los que encierran —sin duda— todo el saber, pero que no lo “muestran” a quien está construyendo esas nociones. Asimismo, no se considera este despliegue de procedimientos no convencionales solamente por su carácter de anterioridad respecto de los procedimientos formales, sino que suscita interés la coexistencia de ambos tipos de procedimientos, por ejemplo, por el valor que poseen los primeros como medios de control de los segundos.

No ocurre lo mismo con el lugar otorgado a las *representaciones no convencionales*. En efecto, aunque los procedimientos de los alumnos conllevan naturalmente representaciones (en particular, no debe olvidarse que la expresión verbal es una forma de representación), y aunque es bien reconocida la importancia de la representación en matemática, la tradición escolar ha venido postergando la reflexión sobre este punto. Así como se ha venido reconsiderando el lugar de los procedimientos no convencionales en relación con los formales, debe revisarse la postura tradicional que ignora el valor del uso de representaciones no convencionales en la adquisición del conocimiento matemático. Para ello es necesario comenzar a identificar los *aspectos específicos del aprendizaje y de la enseñanza* que una mirada sobre las representaciones puede ayudar a iluminar. Hasta aquí hemos tocado tres cuestiones fundamentales sobre este punto que sintetizamos en términos de saberes necesarios por parte del docente:

2. Véanse, por ejemplo, Parra (1994) y Saiz (1994).

- distinguir conceptualmente los objetos de conocimiento y sus representaciones;
- comprender las condiciones bajo las cuales una representación funciona como tal;
- reconocer las distintas representaciones que utilizan los alumnos como una manera de conocer, constitutiva de los conocimientos que construyen.

A continuación analizaremos otros cuatro aspectos relevantes: las distintas funciones que cumplen las representaciones para los alumnos (apartado 4), la existencia de conocimientos matemáticos que no están implicados en las operaciones sobre los símbolos (apartado 5), la complejidad cognoscitiva que supone la interpretación de representaciones (apartado 6) y la necesidad de revisar las concepciones de aprendizaje y de enseñanza que subyacen en las prácticas actuales con relación a los sistemas simbólicos (apartado 7). Si bien el análisis de estos aspectos no agota el tratamiento del tema, es por lo menos un buen comienzo que permitirá agregar nuevas conclusiones a las extraídas hasta el momento. El capítulo se cierra con un conjunto de saberes necesarios para el docente abocado a conducir una enseñanza que se proponga la construcción del sentido de los conocimientos por parte de los alumnos.

4. DISTINTAS FUNCIONES DE LAS REPRESENTACIONES PARA LOS ALUMNOS

Aníbal, 7 años (después de resolver un problema): “Mamá, ¿los problemas de división, llevan planteo?”³

El famoso “planteo” ha sido siempre considerado *necesario* para resolver los problemas; más aún, el planteo escrito en el cuaderno funciona como índice de que el alumno pensó y razonó, y su ausencia como índice de lo contrario. El ejemplo de Aníbal muestra que ninguna de esas dos cosas es necesariamente así para los alumnos. Por un lado, para él, el planteo (convencional) es algo que uno *debe* poner, antes o después de resolver el pro-

3. En la Argentina, el “planteo” es una forma convencional de organización de los datos que es enseñada a los alumnos con la intención de ayudarlos a razonar para resolver un problema.

blema, aunque no haya sido un instrumento de razonamiento para guiar la resolución (“¿los problemas de división llevan planteo?”). Por otro lado, posiblemente él haya utilizado alguna otra organización escrita de los datos (una suerte de “planteo personal”) para resolver el problema, que tal vez haya quedado en una hoja borrador, porque la práctica escolar no le “enseñó” que fuera importante comunicarlo.

Como ya hemos visto a propósito de otras tareas, los chicos utilizan representaciones durante el *proceso mismo de resolución* de un problema, representaciones que los ayudan a pensar, a recordar, a guardar información, a calcular, etcétera. En esos casos, las representaciones constituyen un medio para la resolución del problema, y cumplen funciones diferentes de la de *comunicación para otros* de algo pensado con anterioridad.

Las distintas funciones del lenguaje y las representaciones simbólicas en la actividad matemática (para comunicar a otros o a sí mismo, como ayuda al pensamiento, como apoyo al cálculo, a la planificación y al control, etcétera), fueron teorizadas por Vergnaud (1991) y por Duval (1995). En particular, Vergnaud (1996) incorpora algunas de ellas explícitamente en su teoría de los campos conceptuales, por el valor que les otorga en la actividad matemática.

Para Duval (1993; 1995), un punto crucial para el aprendizaje de la matemática concierne al trabajo con distintos sistemas de representación, porque es así como se logra que una representación funcione como tal, de acuerdo con la condición que el autor ha establecido y que analizamos anteriormente (que el alumno no confunda el objeto con ninguna de sus representaciones y que lo reconozca en cada una de ellas).⁴

Estas consideraciones aportan aún más argumentos a favor de la necesidad de facilitar espacios de emergencia de las representaciones no convencionales de los alumnos, en tanto sostienen la hipótesis de que las representaciones externas tienen un *valor productivo* en el aprendizaje. También sugieren la necesidad de revisar ciertas tradiciones escolares, en virtud de las consecuencias que conllevan para el aprendizaje al estar ancladas en visiones más restringidas sobre las funciones del lenguaje y las representaciones simbólicas.

4. Más precisamente, Duval destaca la importancia de que la enseñanza tome a su cargo el trabajo de los alumnos con diferentes maneras de representar, con lo que aporta cada una de ellas y con los pasajes más o menos complejos de una a la otra.

La primera revisión debería ser sobre el criterio por el cual —especialmente en el Nivel Inicial y el primer ciclo de EGB— las actividades de los alumnos deben pasar necesariamente y de manera ordenada por etapas de *acción efectiva, representación gráfica y representación simbólica*.⁵ Esta secuenciación deja lugar a un solo aspecto —por cierto importantísimo— de las representaciones externas en relación con la actividad matemática: la función de representación como comunicación (para otros), como manera de hacer público y dejar expresado lo que ya se hizo con anterioridad. Sin embargo, esta subordinación de lo simbólico a la acción no da lugar al uso de las representaciones simbólicas involucradas en el proceso mismo de resolución de problemas —que comienza con la representación del problema en sí mismo (organización de los datos y la meta, etcétera)—⁶ y que, como vimos, desempeñan distintas funciones importantes en la actividad matemática.

Revisar esta tradición no significa interpretar que estamos sugiriendo invertir el orden, es decir, comenzar por lo simbólico para seguir con lo concreto. En realidad, se trata justamente de comprender que no debe establecerse un criterio único e independiente de la situación particular de enseñanza. Por ejemplo, al trabajar con colecciones en Nivel Inicial o primer año de la EGB, en algunos casos será oportuno comenzar a trabajar con colecciones reales; en otras, con colecciones dibujadas. El maestro debe analizar la conveniencia de una u otra modalidad en cada caso, para lo cual, entre otros saberes, debe tener identificadas las distintas funciones que pueden cumplir las representaciones para los alumnos al trabajar en matemática.

Otra cuestión a revisar —especialmente en relación con los primeros años de la EGB— es la tradición⁷ según la cual el planteo es enseñado por el maestro como *la* manera de pensar un problema. Si bien el planteo convencional fue inventado con la intención de ofrecer un medio para la resolución de los problemas, mediante ese tipo de prácticas los alumnos no encuentran

5. No entraremos a considerar que esta división deja suponer que la representación gráfica es no simbólica, pero no podemos dejar de formular el problema, en la medida en que estamos hablando específicamente de la representación.

6. Véanse, por ejemplo en Parra (1994), distintos modos de resolución de un problema en función de las representaciones que los alumnos pueden hacerse de éste, diferentes composiciones numéricas en función de las situaciones a resolver, etcétera.

7. Puede verse un análisis crítico de esta tradición escolar en Saiz (1994).

espacios para utilizar otras representaciones que les resulten significativas para cada problema y, por consiguiente, importantes para pensar y resolver.

No debe interpretarse de ninguna manera que estamos sugiriendo eliminar el planteo en la resolución de problemas. Todo lo contrario, se trata de restituir la función para la que fue creado, favoreciendo que los alumnos desplieguen y registren en sus cuadernos sus "planteos personales", esos que, como en el caso de Aníbal que hemos analizado, son los que efectivamente los ayudan en el proceso de resolución.

Es importante destacar que los procesos desplegados mediante el uso de las distintas funciones de las representaciones son constitutivos tanto del sentido de los conocimientos que los alumnos construyen de los *objetos matemáticos* como de los conocimientos que construyen de los *sistemas de representación*.

5. PROBLEMAS Y CUENTAS: ¿UNA FALSA DIFERENCIA?

¿Por qué tratar esta cuestión? Porque a una larga tradición escolar que proponía a los alumnos grandes cantidades de cuentas, ha seguido una nueva corriente basada en la resolución de problemas. ¿En qué sentido esta nueva corriente debería significar una evolución en didáctica? En este apartado responderemos esta pregunta en términos de los conocimientos necesarios para resolver un problema o una cuenta. En particular, veremos que hay conocimientos que no son necesarios para *realizar* una operación, pero sí son necesarios para la *elección*⁸ de la operación que permitirá resolver un problema.

Este análisis es fundamental para que una práctica basada en la resolución de problemas signifique una verdadera evolución en relación con las prácticas basadas en cuentas: se trata de identificar los distintos conocimientos matemáticos que los alumnos podrían construir en cada caso. Analizaremos esta cuestión mediante el siguiente problema de adición:

Tengo en esta caja 3 bolitas y en esta otra, 42. ¿Cuántas bolitas tengo en total?

8. No distinguiremos aquí el carácter (implícito o explícito) de la elección, porque no es significativo en este punto. Vale la pena recordar, sin embargo, que caben ambas posibilidades (véanse 3.1 y 3.2).

¿Qué conocimientos se requieren para resolverlo? En primer lugar es necesario tener en cuenta dos aspectos *distintos* comprometidos en la resolución. Se trata de:

1. Encontrar que " $3 + 42$ " es la *operación numérica* adecuada para resolver el problema.
2. Calcular la suma.

El hecho de que se trata de cosas distintas queda bien expresado por Vergnaud (1991). Efectivamente, según expone a manera de ejemplo en su definición de *sentido de un concepto* —que presentamos a continuación—, *ambos* aspectos son constitutivos del *sentido* de la adición.

Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones mismas. Tampoco está en las palabras o en los símbolos matemáticos. Sin embargo, se dice que una representación simbólica, que una palabra o un enunciado matemático tienen sentido, o varios sentidos, o no tienen sentido para tales o cuales individuos; se dice también que una situación tiene sentido o no lo tiene. Entonces, ¿qué es el sentido?

El sentido es una relación del sujeto con las situaciones y los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una relación o por un significante los que constituyen el sentido de esta situación o este significante para este individuo. Los esquemas, es decir las conductas y su organización. *El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en juego para tratar las situaciones a las cuales se enfrenta, y que implican la idea de adición, es también el conjunto de esquemas que puede poner en juego para operar sobre los símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y del lenguaje que representan la adición.* [Las bastardillas son nuestras.]

Cuando la maestra interviene en la elección de la operación adecuada, contestando afirmativamente a la pregunta tan conocida "*Seño, ¿es de más?*", podemos decir que los chicos resuelven la cuenta, pero no el *problema*. Aunque para ellos el cálculo en sí mismo represente también un problema, podemos decir que en ese caso *el problema* enunciado por la maestra no es el que han resuelto. Algo similar ocurre cuando el enunciado

*sugiere*⁹ que se trata de una suma. En ambos casos, el problema ha sido “matado”, ha sido *reducido* a la resolución de la cuenta. Los alumnos no han necesitado poner en juego todos los conocimientos necesarios para tratar la situación.

Es cierto, se trata de cosas distintas. Pero, ¿cuáles son los conocimientos necesarios para abordar cada uno de esos aspectos?

Ya nos hemos referido a los conocimientos involucrados en algunos procedimientos de los alumnos para realizar la *operación de suma*. Hemos analizado los conocimientos en términos de las propiedades de las operaciones (asociativa y conmutativa de la suma) y en términos de propiedades específicas del sistema de numeración (descomposición aditiva) puestas en juego en los procedimientos. En cuanto al conocimiento involucrado en la *elección de la operación*, se trata del aspecto cardinal del número, en relación con la adición de cantidades. Nuevamente, Vergnaud (1991) nos ayuda a comprender, desde el lado del sujeto que resuelve el problema, el conocimiento —seguramente implícito— necesario para realizar esa elección. Vergnaud describe —en términos de teorema en acto— el conocimiento de los alumnos en una situación en la que podrían contar el total de elementos de la colección (porque se trata de colecciones disponibles) y *sin embargo* realizan el cálculo:

[...] entre los 5 y los 7 años, los niños descubren que no es necesario contar el total para encontrar el cardinal de $A \cup B$ si ya se ha contado el cardinal de A y el de B . Uno puede expresar este conocimiento por un teorema en acto:

$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$ (si A y B son disjuntos)

La ausencia de cuantificador deja entender que este teorema no tiene una validez universal para los niños, sino un alcance local, para pequeñas colecciones por ejemplo.

Es importante notar que este teorema en acto es también pertinente para describir el conocimiento involucrado en la elección de la operación en el caso del problema que estamos analizando, donde las colecciones no están disponibles.

9. Charnay (1994b) utiliza la expresión “indicios desencadenantes”, que da cuenta significativamente de los efectos que produce en los alumnos el uso de palabras clave en los enunciados de los problemas.

Tal vez valga la pena reformular lo que destaca Vergnaud acerca de “la ausencia de cuantificador universal”. En otras palabras: se está refiriendo a algo que es bien conocido por el docente, y es el hecho de que —por ejemplo, para pequeñas colecciones— los chicos suman los dos cardinales, pero para grandes colecciones necesitan reunirlos y contar el total. El alcance del teorema en acto enunciado es entonces para esas pequeñas colecciones para las cuales los chicos suman los cardinales.

En síntesis, toda esta discusión puede ubicarse nuevamente dentro del análisis que veníamos realizando —en términos de objetos y representaciones—. El conocimiento identificado por Vergnaud en los alumnos en estas situaciones expresa una propiedad del número (objeto), y no depende del sistema de representación (sistema de numeración decimal, romano, u otro) utilizado para realizar el cálculo.

El cálculo de la suma *por sí solo* no pone en juego dicho conocimiento (relativo al aspecto cardinal del número), aunque sí intervengan en el mismo —como hemos visto— otros conocimientos del objeto (propiedades de las operaciones).

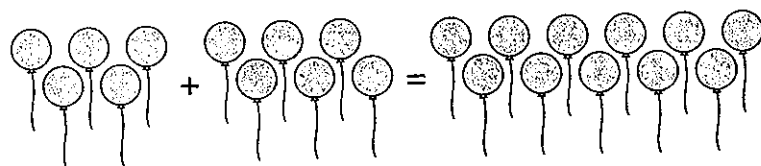
Naturalmente, esto no es algo que el docente deba *decir* a sus alumnos. Se trata, sí, de algo que debe saber para abordar el trabajo didáctico. Es fundamental apreciar la distancia entre los aspectos señalados en relación con el problema —la operación como *recurso* para resolverlo, y *hacer la cuenta*— desde el punto de vista del saber matemático y, en consecuencia, de los conocimientos a construir por los alumnos al resolver el problema. Sólo esta comprensión coloca al docente en la posibilidad de elegir, y no sólo de abandonar viejas prácticas por el mero hecho de que las nuevas corrientes sugieren otra cosa. Aceptar como mandato formulaciones del tipo “Ahora no hay más ejercicios en el aula, hay que hacer situaciones problemáticas” puede conducir, sin una comprensión adecuada, a prácticas educativas que signifiquen por parte de los alumnos la resolución de “ejercicios disfrazados de problemas”.

6. USOS (Y ABUSOS) DE LAS REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS

Abordaremos ahora un conjunto de fenómenos complementarios a los analizados en los apartados anteriores, esta vez en relación con la *complejidad cognoscitiva involucrada* en el uso de representaciones.

Cuando el maestro presenta un problema, la interpretación –por parte de los alumnos– de la representación utilizada en la *formulación* de éste es parte de la tarea y condiciona la resolución. Seguramente, el maestro es consciente de ello. Sin embargo, la presentación de actividades a menudo parece subestimar la complejidad de interpretación de un gráfico, un esquema, una escritura numérica, como si naturalmente el alumno “viera” en la representación lo mismo que “ve” el docente. Esta ilusión de transparencia entre lo que “se muestra” y el objeto o relación representados es más pronunciada cuanto más “cerca de lo concreto” se encuentra la representación utilizada.

Un buen ejemplo de esto es el analizado por Moreno (véase el capítulo 3, en este volumen), con respecto a una adición de cantidades representada mediante el siguiente esquema:



Moreno discute varios de los problemas que conllevan este tipo de representaciones al ser interpretadas por los alumnos. Es importante agregar que los signos “+” e “=”, que son pertinentes para las *operaciones sobre numerales*, no lo son en este contexto. A esta falta de pertinencia se agrega el hecho de la débil relación de los alumnos –en los primeros niveles de escolaridad– con el sistema simbólico en el que pretende apoyarse la representación.

Es importante tener en cuenta este tipo de dificultades a la hora de elegir una forma no convencional de representación en la formulación de un problema.

Asimismo, cabe destacar los problemas de interpretación de los textos verbales. A menudo suele atribuirse la dificultad de los alumnos en la interpretación de enunciados a problemas de “lectura comprensiva”, como si la comprensión de textos matemáticos fuera una “aplicación” de una capacidad general de lectura. Bajo esta hipótesis, se disminuye la importancia de un trabajo específico en el aula de Matemática destinado a la interpretación de las relaciones matemáticas implicadas en los enunciados.

Por otra parte, algunos *sistemas convencionales* de representación –por sus características intrínsecas– favorecen la profundización de la ilusión de transparencia de la que hablábamos más arriba. Duval (2002), por ejemplo, destaca una particularidad de las representaciones geométricas que ilumina especialmente este fenómeno:

Las figuras geométricas presentan necesariamente características topológicas, afines y métricas, lo que conduce a considerarlas como siendo de la misma naturaleza que lo que ellas representan [...].

Es decir que las particularidades de las representaciones geométricas¹⁰ profundizan la dificultad de lograr que “el objeto no sea confundido con su representación”, una de las condiciones establecidas por Duval para que la representación funcione como tal.

De cualquier manera, el problema de la representación no es patrimonio de la geometría ni comienza en el dominio numérico con la entrada de las “x” en el aula de Matemática: tanto el numeral “2” como el dibujo de un rombo son representaciones y –en la medida en que los objetos que representan no son perceptibles con los sentidos– existe una tendencia natural a identificar los objetos con sus representaciones, como ya señalaba Frege en 1891.

Volvemos así sobre el problema planteado al comienzo de este capítulo acerca de la representación en matemática, visto ahora desde la complejidad de *interpretación del funcionamiento* de un sistema simbólico. Señalamos allí la importancia de interpretar las representaciones utilizadas por los alumnos como una *manera de conocer*, constitutiva de los conocimientos matemáticos que construyen los alumnos. El análisis de este apartado tiende a mostrar un aspecto complementario en el proceso de enseñanza: se trata de la necesidad de elección de sistemas de representación adecuados y considerar como *objeto de enseñanza* el funcionamiento de los sistemas simbólicos. Ahora bien, hemos insistido en la necesidad de distinguir conceptualmente el objeto matemático de su representación a fin de conducir una enseñanza satisfactoria. Sin embargo, esto no significa que uno deba

10. Broitman e Itzcovich (véase el capítulo 8, en este volumen) presentan y analizan problemas didácticos ligados a la representación en geometría, basándose en resultados de investigaciones nacionales e internacionales.

considerar separadamente la enseñanza de los objetos matemáticos y la enseñanza de los sistemas simbólicos. No se trata de enseñar los sistemas simbólicos al margen de la actividad matemática, como si se tratara de un capítulo aparte de la enseñanza de la matemática, sino de comprender que si bien un sistema de representación no se confunde con el objeto matemático, sí constituye un objeto de conocimiento, y de tener en cuenta toda la complejidad que esto supone para el sujeto que intenta apropiarse de él. Esta apropiación está relacionada con la del objeto matemático, pero no se reduce a ella, en tanto el sistema de representación guarda especificidad.

El trabajo didáctico necesario es a largo plazo y compromete todos los niveles de escolaridad, pero debe comenzar en los primeros años.¹¹ El criterio general debería tener en cuenta tanto las cuestiones específicas relativas a la apropiación de los distintos sistemas de representación como las relaciones a establecer con los objetos que representan, cuidando especialmente de favorecer una actividad matemática tendiente a que las distintas representaciones funcionen como tales. En particular, se debería proveer a los alumnos, desde el comienzo de la escolaridad, de actividades con diferentes formas de representación (representaciones verbales, simbólicas, icónicas, etcétera) (Duval, 1993; 1995), a fin de que dispongan de experiencias que les permitan conocer tanto el funcionamiento de los sistemas simbólicos como los distintos aspectos de los objetos matemáticos que éstos permiten representar.¹²

Para ello, el docente necesita identificar las características de los distintos sistemas simbólicos,¹³ las relaciones que guardan con los objetos que representan, la complejidad que supone su apropiación en cada caso, la dis-

11. En este libro, Moreno (capítulo 3) aborda consideraciones generales acerca de la enseñanza del sistema de numeración decimal, y Quaranta, Tarasow y Wolman (capítulo 5) presentan los resultados de una investigación sobre el mismo tema.

12. En Panizza (1997) se analizan algunos errores que pueden explicarse en términos de concepciones de los alumnos ligadas al uso prolongado o exclusivo de representaciones que privilegian ciertos significados en detrimento de otros.

13. Lerner y Sadovsky (1994) realizan un análisis comparativo de distintos sistemas de numeración, en particular del decimal y del hablado (de habla hispana). Brissiaud (1993) realiza un análisis comparativo de distintos sistemas simbólicos para representar cantidades y para el cálculo, en particular desde el punto de vista de los conocimientos que se ponen o no en juego a través de su uso en cada caso.

tinta pertinencia de unos y otros en función de los conocimientos que se pretenden abordar, así como también acceder a las investigaciones didácticas acerca de su enseñanza.¹⁴

7. ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS SIMBÓLICOS: ¿UN REGRESO AL EMPIRISMO?

¿Es necesario considerar como objeto de enseñanza el funcionamiento de los sistemas simbólicos? Sí, claro, naturalmente, no sólo hay que enseñar conceptos, hay que enseñar a representar los números, el funcionamiento del sistema... ¡Hay que enseñar a hacer las cuentas! El problema es cómo. Para profundizar en este aspecto importante de la educación matemática vamos a analizar ahora una oposición entre *conceptual* y *mecánico* que circula a menudo al expresar frustraciones sobre los logros de los alumnos.

Tal vez el lector haya escuchado o formulado alguna vez expresiones que oponen el "resolver un problema comprensivamente, razonando y utilizando conceptos" y "resolverlo mecánicamente, operando sobre los símbolos". Esta oposición resulta falsa porque se plantea en dos dimensiones diferentes de análisis: la de *disponer* de un conocimiento y la de su *aprendizaje*. Veamos por qué.

El hecho de que los mecanismos de cálculo puedan ser utilizados "automáticamente" es, sin duda, un objetivo de la educación matemática. Ahora bien, también se espera que los conceptos matemáticos —si bien no constituyen mecanismos— estén disponibles, que se pueda acceder a ellos "automáticamente" una vez adquiridos. Es lo que ocurre cuando conceptos y algoritmos son del dominio del sujeto. El docente, por ejemplo, automáticamente cuenta la cantidad de sus alumnos si se propone ir al teatro a comprar entradas para llevarlos a todos juntos, e identifica también inmediatamente si un problema "es de más" o "es de por". Asimismo, resuelve fácilmente una cuenta, porque domina los mecanismos de cálculo. Decimos que para el docente ninguna de estas cosas constituye "un problema". La posibilidad de acceder automáticamente a un conocimiento no de-

14. En Argentina se vienen desarrollando desde 1992 un conjunto de investigaciones acerca del aprendizaje del sistema de numeración. Para una referencia detallada, el lector interesado puede consultar el capítulo 5.

lo requiere (Duval, 2002), como ocurre cuando se pretende conducir una enseñanza acorde con este enfoque.

8. SÍNTESIS EN TÉRMINOS DE SABERES NECESARIOS

Hemos realizado un análisis en relación con lo numérico, con la intención de presentar –como anunciamos en la introducción– distintas dimensiones relevantes para abordar la complejidad de la adquisición del “sentido” en matemática. Hemos visto que existe un sentido de los conceptos, un sentido de los símbolos, un sentido de las expresiones, un sentido de los conocimientos, así como diversos aspectos constitutivos del sentido en cada caso y condiciones adecuadas para su adquisición. Identificar estos distintos aspectos es la etapa inicial para abordar una enseñanza de la matemática que se proponga seriamente el logro de la adquisición del “sentido” en esta disciplina.

Por otra parte, a través del análisis precedente hemos identificado distintos saberes necesarios para conducir una enseñanza que contemple las distintas dimensiones del sentido que hemos presentado: saberes relativos al edificio matemático; saberes relativos al aprendizaje; saberes didácticos. Esta distinción –justificada por razones teóricas– es mantenida aquí con fines expositivos y no debe ser considerada como una división. Como se verá a través de los distintos capítulos del libro, tanto el desarrollo de la didáctica de la matemática como el trabajo áulico realizado dentro de este marco teórico requieren la capacidad de integración de estos distintos saberes.

Saberes relativos al edificio matemático

Hemos encontrado desde distintas perspectivas de análisis la necesidad de distinguir conceptualmente los aspectos atribuibles al objeto y los atribuibles a su representación, así como la comprensión de sus relaciones.

Con relación a lo numérico, se trata de comprender los aspectos relativos al número y las operaciones numéricas (objeto) y los relativos al sistema de numeración (representación), así como sus diferencias y sus relaciones. A grandes rasgos, se trata entonces de comprender:¹⁵

15. Skemp (1980) realiza un excelente desarrollo de estos aspectos del edificio matemático.

- Las funciones de los distintos tipos de números para cuantificar aspectos de la realidad (contar, medir, etcétera).¹⁶
- El carácter de necesidad de las operaciones y sus propiedades en relación con las funciones de los números.
- La independencia de las propiedades de los distintos tipos de números y operaciones de las características notacionales del sistema de numeración.
- La forma de funcionamiento de los diferentes sistemas simbólicos y las posibilidades de representación y de cálculo que ofrecen –en particular, comprender de qué manera los algoritmos convencionales de cálculo incorporan las propiedades de las operaciones–.
- Que el cálculo utiliza un sistema mixto de reglas: reglas propias del objeto y reglas del sistema de representación utilizado, etcétera.

Saberes relativos al aprendizaje

- Interpretar los procedimientos y representaciones en términos de conocimientos que ponen en acto los alumnos al realizarlos.
- Distinguir en los conocimientos de los alumnos los que son atribuibles a los objetos de conocimiento de aquellos que comprometen fundamentalmente particularidades de los sistemas simbólicos.
- Considerar las distintas maneras de conocer (implícitas, conscientes, explícitas) como constitutivas de los conocimientos.

Saberes didácticos

- Identificar distintas dimensiones de la construcción del “sentido” en el aprendizaje de la matemática.
- Identificar relaciones entre las prácticas áulicas y los conocimientos que construyen los alumnos (ausencia o presencia de “sentido” en sus conocimientos).
- Reconocer la importancia de permitir los procedimientos y representaciones espontáneos de los alumnos en la evolución del conocimiento.
- Reconocer la complejidad del funcionamiento de los sistemas simbólicos utilizados en la enseñanza de la matemática.
- Reconocer en las distintas concepciones de enseñanza las concepciones didácticas subyacentes.

16. Los capítulos 3 y 4 presentan distintos aspectos y funciones del número natural.

Las investigaciones cognitivas y didácticas ofrecen elementos para guiar una gestión del aprendizaje y de la enseñanza desde una perspectiva que tenga en cuenta tanto la especificidad del nivel en el que se desarrolla la enseñanza como los aprendizajes a realizarse a largo plazo a través de la escolaridad. Asimismo, abordan problemas generales de la construcción del sentido en matemática, así como problemas particulares de dominios específicos (aritmética, geometría, etcétera). Los distintos capítulos de este libro contienen análisis y situaciones didácticas que dan cuenta de investigaciones internacionales y nacionales, en particular de los propios autores. Estos trabajos, junto con los saberes necesarios que acabamos de sintetizar y el sustento teórico provisto por la teoría de situaciones didácticas, constituyen recursos para elegir las situaciones adecuadas al saber matemático al que se apunte en un momento dado de la enseñanza y realizar una gestión de la clase que favorezca la construcción del sentido de los conocimientos por parte de los alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

- Brissiaud, R. (1993): *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*, Madrid, Visor.
- Brousseau, G. (1983): "Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2.
- Charnay R. (1994a): "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- (1994b): "Del análisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación: algunas pistas...", en C. Parra, I. Saiz y P. Sadovsky, *Enseñanza de la matemática. Selección bibliográfica IV*, documento producido por el PTFD, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, República Argentina.
- Drouhard, J.-P. (1995): "Algèbre, calcul symbolique et didactique", en R. Noirfalise y M.-J. Perrin-Glorian (comps.), *Actes de la VIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Clermont-Ferrand, IREM de Clermont-Ferrand. (El mismo texto se encuentra en J.-P. Drouhard, "Signes et sens en calcul symbolique", *Actes du séminaire SFIDA*, Niza, IREM de Niza, 1996.

- Duval, R. (1993): "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, Estrasburgo.
- (1995): *Sémiosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang.
- (2001): *Cours de psychologie et de didactique pour les professeurs d'école*, Polycopié, Gravelines, IUFM du Nord-Pas-de-Calais.
- (2002): "'Voir' en Mathématiques", en E. Filloy, F. Hitté, C. Imaz, A. Rivera y U. Ursini (eds.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual*, México, Fondo de Cultura Económica (en prensa).
- Frege, G. (1974): *Escritos lógico-semánticos*, Madrid, TECNOS.
- Laborde, C. (1991): "Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques", en C. Garnier, N. Bernardz e I. Ulanovskaya: *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale*, Bruselas, De Boeck.
- Lerner, D. y P. Sadovsky (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Panizza, M. (1997): "Aproximación al análisis del error desde una perspectiva constructivista del aprendizaje", en *Los CBC y la enseñanza de la matemática*, Buenos Aires, A-Z.
- Parra, C. (1994): "Cálculo mental en la escuela primaria", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Saiz, I. (1994): "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Sierpinska, A. (1995): *La compréhension en mathématiques*, Québec, De Boeck Université.
- Skemp, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de la matemática*, Madrid, Morata.
- Vergnaud, G. (1991): "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3.
- (1996): "The theory of conceptual fields", en L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah (NJ), Lawrence Erlbaum.

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Mabel Panizza

1. INTRODUCCIÓN

En virtud de la presencia de la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau en los diferentes capítulos del libro, y para facilitar su lectura, he considerado conveniente presentar una síntesis organizada de conceptos y términos básicos de esta teoría.¹ No pretendo –ni sería posible– abarcar toda su complejidad ni en amplitud ni en profundidad. El criterio adoptado ha sido el de presentar los conceptos y términos a los que se hace referencia en el libro.² Asimismo, analizo algunas cuestiones que han mostrado, en la evolución de la teoría o en la experiencia con docentes, necesidad de profundización o aclaración.

Se trata de una teoría compleja, que requiere –como todo dominio de conocimiento– muchos años de dedicación para ser bien comprendida. Con la lectura de este capítulo, el lector accederá a un primer nivel de significación de los términos y conceptos y a una guía de aspectos sobre los cuales

1. Otras teorías e investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática han sido incluidas como referencias específicas en cada capítulo.

2. El lector interesado puede consultar Brousseau (1986), donde encontrará la teoría expuesta en profundidad.

deberá estar especialmente atento a fin de evitar interpretaciones erróneas. Los análisis y propuestas de los distintos capítulos, así como las observaciones provenientes de las puestas áulicas que el lector juzgue conveniente realizar a partir de ellos, constituirán sin duda una base para sucesivas resignificaciones de los conceptos de la teoría aquí presentados.

2. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA FRANCESA

La denominada "escuela francesa de didáctica de la matemática" nació en los años setenta como producto de las preocupaciones de un grupo de investigadores —en su mayoría matemáticos de habla francesa— por descubrir e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático. En esta escuela se destacan dos convicciones epistemológicas. Por un lado, la de que la identificación e interpretación de fenómenos y procesos objeto de interés supone el desarrollo de un cuerpo teórico, y no puede reducirse a observaciones realizadas a partir de experiencias aisladas ni a cuestiones de opinión; por otro lado, la convicción de que ese cuerpo teórico debe ser específico del saber matemático, y no puede provenir de la simple aplicación de una teoría ya desarrollada en otros dominios (como la psicología o la pedagogía).

3. LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Dentro de esta disciplina (la didáctica de la matemática de la escuela francesa), Guy Brousseau desarrolla la "Teoría de Situaciones Didácticas". Se trata de una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos bajo la hipótesis de que éstos no se construyen de manera espontánea.

Guy Brousseau (1999) afirma, y nosotros coincidimos con él, que:

La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejerci-

cios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores.

La teoría de situaciones está sustentada en una concepción constructivista —en el sentido piagetiano— del aprendizaje, que Brousseau (1986) caracteriza de esta manera:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.

3.1. Situaciones didácticas. Situaciones a-didácticas. Devolución

El rol fundamental que esta teoría otorga a la "situación" en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la siguiente descripción de Brousseau (1999):

Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético".

La *situación didáctica* es una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. Brousseau, en 1982 (citado por Galvez, 1994),³ la definía de esta manera:

Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

3. La autora presenta y analiza diversos conceptos de la teoría.

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central—dentro de la organización de la enseñanza— a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego. El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de *situación a-didáctica* o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica (Brousseau, 1986). En palabras de Berthelot y Salin (1992):

El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Johsua y Dupin (1993, cap. V) sintetizan así la manera en que estas hipótesis y conceptos se articulan en la teoría:

Lo que caracteriza la perspectiva constructivista es la voluntad de poner al alumno en situación de producir conocimientos (en general reformulando—y luchando contra— conocimientos anteriores) en referencia en primer lugar al problema, y no en primer lugar a la intención de la enseñanza. Es la presencia y la funcionalidad en la situación didáctica de una etapa de *situación a-didáctica* la marca principal de la diferencia con las situaciones estrictamente formales.

Es conveniente analizar algunas cuestiones relacionadas con los términos que acabamos de introducir.

En primer lugar, es frecuente, al comienzo del descubrimiento de este dominio, confundirse en la interpretación de los términos “didáctica” y “a-didáctica”. La situación didáctica es aquella que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema a partir de sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución.

Por otra parte, la definición de situación a-didáctica contiene distintos aspectos que conviene analizar por separado.

1. El carácter de *necesidad* de los conocimientos.

La “situación” se organiza de manera tal que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, en el sentido de que la situación “no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende”. La comprensión de esta idea es fundamental para el análisis didáctico de una situación y en particular para identificar en una secuencia de enseñanza los distintos aspectos a los que se apunta en cada etapa. El problema es que a menudo se confunde lo que es *necesario* con lo que es *posible* utilizar como procedimiento para resolver un problema y, en consecuencia, se confunden los conocimientos que se requieren o no poner en juego para dominar la situación. Un buen acercamiento a esta cuestión es pensarlo por la negativa, es decir, por los conocimientos que *no* son necesarios para dominar una situación. Por ejemplo, si al reunir sobre la mesa dos colecciones de 15 y 17 autitos respectivamente se pregunta por la cantidad total de autitos, *no* es cierto que sea *necesario* realizar el *cálculo* de la suma: la operación “ $15 + 17$ ” es uno de los tantos *procedimientos posibles* para adicionar las cantidades. Como las colecciones están disponibles, los alumnos pueden reunir los autitos y contar el total o realizar sobreconteo. Decimos entonces que esta situación no apunta al cálculo (aunque los alumnos puedan, obviamente, calcular). Cuando las colecciones no están disponibles, en cambio, el cálculo de la suma es necesario para “dominar de manera conveniente” este problema de adición de cantidades. Podrá argumentarse que los alumnos pueden acudir a representaciones de las dos cantidades—por ejemplo, dibujando palitos— y evitar el cálculo contando el total. También puede argumentarse que los alumnos podrían evitar el cálculo usando los dedos. Efectivamente, en ciertas condiciones pueden surgir procedimientos que no requieran el cálculo. Ahora bien, esos procedimientos pueden ser bloqueados desde la situación si se busca hacer evolucionar hacia el cálculo los procedimientos de los alumnos. Efectivamente, si no se brindan medios para poder realizar representaciones o si las cantidades son muy grandes, los alumnos no podrán utilizar los procedimientos de conteo o sobreconteo ni con palitos ni con sus dedos, y el cálculo será necesario.

Este análisis muestra que existen características de la situación (en este

caso la disponibilidad de medios para representar y el tamaño de los números) que el docente puede variar de manera tal que se modifiquen las estrategias posibles de resolución y, en consecuencia, el conocimiento a construir. Esta idea será formalizada más adelante en este capítulo, al presentar la noción de *variable didáctica*, concepto central de la teoría.

2. La noción de sanción.⁴

No debe entenderse "sanción" como "castigo" por una "culpa" o una "equivocación". La idea es que la situación debe estar organizada de manera tal que el alumno interactúe con un *medio* que le ofrezca información sobre su producción. Que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción y que tenga posibilidad de intentar nuevas resoluciones son criterios fundamentales para que –por sí mismo– establezca relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtiene. La siguiente descripción de Rolando García (2000) es elocuente del sustento teórico de estas condiciones cuando se busca generar un aprendizaje por adaptación:

[...] una vez que los encuentros "fortuitos" con la "realidad" (que incluye el propio cuerpo) se toman deliberados, con la construcción de los esquemas, las reiteraciones conducen a *anticipar* el resultado de una acción. El gran progreso cognoscitivo que realiza un niño, y que la Psicología Genética ha puesto en claro, consiste en poder pasar de "lo empujé y se movió" a "si lo empujo se mueve".

Este análisis permite también advertir sobre la importancia y el significado del principio de "no intervención" del docente en este proceso: la situación a-didáctica es concebida como un momento de aprendizaje (y no de enseñanza); los alumnos deben encontrar por sí mismos relaciones entre sus elecciones y los resultados que obtienen.

3. La no intervención del maestro en relación con el saber.

Una vez establecida la importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender

4. El término "sanción" en la evolución de la teoría fue luego reemplazado por el de "retroacción".

que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de *devolución* desarrollado por Brousseau (1998, cap. V):

La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.

Margolinas (1993, cap. I), realizando un análisis de la participación del maestro en las fases a-didácticas y de la devolución, señala una interpretación falsa de la noción de situación a-didáctica: "no es el silencio del maestro lo que caracteriza las fases a-didácticas, sino lo que él dice". Luego plantea que "en la devolución el maestro se despoja de la parte de responsabilidad *que es específica del saber a enseñar*", y destaca que esto no significa que el maestro se retire o se transforme en un espectador. Por último, explica:

[...] la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento [...]. El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema.

Al comienzo de la formación en didáctica, al docente puede resultarle difícil encontrar intervenciones que permitan esta relación del alumno con el problema, sin hacer indicaciones sobre cómo resolverlo. Si no es el silencio del maestro lo que caracteriza estas fases, sino lo que él dice, el maestro se pregunta ¿qué se puede decir? Lo que se puede decir son cosas para alentar la resolución, por ejemplo, que hay diferentes maneras de resolverlo, anunciar que luego serán discutidas, recordar restricciones de la consigna (por ejemplo, si están trabajando sobre las propiedades de un cuerpo, decir "recuerden que no vale armarlo"), etcétera. Las intervenciones estarán pensadas como para instalar y mantener a los alumnos en la tarea.

Otra noción importante de la teoría es la de *variable didáctica* –de la que ya dimos anteriormente un par de ejemplos–. Bartolomé y Fregona presentan así esta noción (véase el capítulo 4):

La noción de variable didáctica, surgida en el marco de la teoría de las situaciones didácticas fue definida a comienzos de la década de los '80, y redefinida más tarde por diferentes autores, entre ellos el mismo Brousseau. [...] las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variar a voluntad del docente y constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación. Como explica Brousseau (1995):

"[El docente] puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes".

Un problema difícil al comienzo del trabajo con esta teoría es advertir que no toda característica de una situación constituye una variable didáctica. En el marco general de la presentación conceptual de esta noción, ese problema es analizado y ejemplificado por Bartolomé y Fregona en el capítulo 4, razón por la cual no lo haremos aquí.

3.2. Tipología de situaciones

La teoría distingue *tres tipos de situaciones didácticas*: las situaciones de *acción*, las de *formulación* y las de *validación*.

- *Situaciones de acción*: el alumno debe actuar sobre un medio (material o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.
- *Situaciones de formulación*: un alumno (o grupo de alumnos) *emisor* debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) *receptor*, que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio material o simbólico) de acuerdo con el conocimiento contenido en el mensaje.

- *Situaciones de validación*: dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de ellas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir, ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.⁵

Una cuestión a retener al iniciarse en la comprensión de esta tipología es el criterio por el cual se identifica una situación particular como de uno u otro tipo. Para ello, hay que tener presente que una situación es de *acción* cuando lo que *requiere* de los alumnos es que pongan en juego medios de acción; lo que es propio de las situaciones de *formulación* es el carácter de necesidad que posee la formulación de un mensaje; las situaciones de validación *requieren necesariamente* no sólo la formulación sino también la validación de juicios por parte de los alumnos. Naturalmente, durante el desarrollo de una situación de acción, los chicos también hablan. Pueden incluso llegar a formular lo que hay que hacer para resolver el problema. Pero no es en las participaciones espontáneas de los alumnos donde se debe identificar el tipo de situación de la que se trata. La situación no es de formulación por el hecho de que los alumnos formulen: la situación es una construcción teórica que demanda un tipo particular de funcionamiento que la caracteriza. Entonces, si la situación demanda que los alumnos actúen, se trata de una situación de acción, aunque los alumnos intercambien informaciones en el momento de resolver el problema.

Esta diferencia es precisada por Brousseau (1986) al analizar los distintos tipos de situaciones a-didácticas desde el punto de vista de las interacciones con el *medio*:

Si el intercambio de información no es *necesario* para obtener la decisión, si los alumnos comparten las mismas informaciones sobre el medio, la componente "acción" es preponderante.

Un análisis similar puede realizarse en relación con la emisión de juicios por parte de los alumnos en situaciones de acción o de formulación, en

5. Pueden usarse las denominaciones *proponente* y *opponente* respectivamente, entendiendo que ambos grupos pueden jugar de manera alternada uno y otro rol durante el desarrollo de una situación.

la medida en que los juicios no son requeridos por estos tipos de situaciones, sino *solamente* por las situaciones de validación. Brousseau (1986) afirma:

Ciertamente la mayoría de las informaciones están implícitamente acompañadas por una afirmación de validez. Pero en la medida en que el emisor no indique explícitamente esta validez, si él no espera ser contradicho o llamado a verificar su información, si el contexto no da una cierta importancia a la cuestión de saber si la información es verdadera, cómo y por qué o si esta validez es susceptible de ser establecida sin dificultad, entonces el mensaje será clasificado como simplemente informativo.

Otra cuestión importante a retener para evitar uno de los malentendidos habituales en la interpretación de la teoría se refiere a la *validación*. A menudo se interpreta que la existencia de una *instancia de validación* es específica de las situaciones a-didácticas de validación. Esto no es así: como hemos visto, la posibilidad de que la situación "sancione" las decisiones que toma el alumno es intrínseca a la noción de a-didáctico y está ligada a la importancia de que el alumno acceda a una información que le permita juzgar por sí mismo la adecuación o inadecuación de su respuesta.⁶ En las situaciones de acción se validan acciones; en las situaciones de formulación se validan mensajes; en las situaciones de validación se validan afirmaciones.

Otro malentendido fundamental es la creencia de que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente primero por una situación de acción, luego por una situación de formulación y finalmente por una situación de validación. Aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos,⁷ no se trata de una regla general. Por un lado, si bien una situación de validación supone la formulación de una aserción, y ésta supone una acción interiorizada, eso no significa que haya que pasar anteriormente por *fases a-didácticas* de acción y de formulación. Por otro lado, habrá conocimientos que será oportuno que funcionen implícitamente y cuya formulación

6. El lector interesado en profundizar en este aspecto de la teoría puede consultar especialmente el análisis de Margolinas (1993) acerca de lo que la autora denomina "el punto de vista de la validación".

7. Véase, por ejemplo, "La course à 20" (La carrera a 20) de Guy Brousseau (1998), capítulo introductorio.

explícita será apropiada mucho después, en ocasiones hasta años después (como puede ser el caso de las propiedades de las operaciones que se analizan en el capítulo 1), o bien conocimientos que sea oportuno formular pero cuya validación explícita no sea apropiada para estos niveles de escolaridad.

3.3. Institucionalización

El último concepto que presentamos aquí es el de *institucionalización*, definido así por Brousseau (1994):

La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.

La institucionalización es de alguna manera complementaria de la devolución. Brousseau (1986) reconoce en estos dos procesos los roles principales del maestro, y afirma:

En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica o pseudo a-didáctica. En la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un *status*.

Esta descripción pone a la luz uno de los aspectos teóricos y prácticos más delicados de la articulación entre los procesos de devolución e institucionalización: los comportamientos o las producciones "libres" del alumno durante las fases a-didácticas de aprendizaje son constitutivos del sentido de los conocimientos⁸ que los alumnos construyen. *Definir las relaciones* entre esos comportamientos o producciones y el saber cultural o científico significa que la institucionalización supone preservar el sentido de los conocimientos construidos por los alumnos en las fases a-didácticas de aprendizaje.

8. Véase la definición del "sentido de un conocimiento" de Guy Brousseau, en el capítulo 1 de este libro.

Desde el punto de vista teórico, el concepto de institucionalización no parece en sí mismo ser más complejo que otros. Sin embargo, es habitual observar en el docente que se inicia en esta disciplina mayores dificultades en la gestión de la institucionalización que al llevar a la práctica otros conceptos de la teoría.

Una explicación posible de este fenómeno puede encontrarse en el análisis de Brousseau (1994):

Por supuesto, todo puede reducirse a la institucionalización. Las situaciones de enseñanza tradicionales son situaciones de institucionalización pero sin que el maestro se ocupe de la creación del sentido: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido. Al principio los investigadores estaban un poco obnubilados por las situaciones a-didácticas porque era lo que más le faltaba a la enseñanza tradicional.

Debe comprenderse que la institucionalización supone establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural, y no debe reducirse a una presentación del saber cultural en sí mismo desvinculado del trabajo anterior en la clase. Durante la institucionalización se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etcétera, a fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.⁹

La posibilidad de confundirlo en la práctica con gestiones de clase tradicionales alejadas de este marco teórico debe advertir sobre la necesidad

9. Brousseau (1995) establece particularidades de un conocimiento agregado al repertorio común de los protagonistas mediante la institucionalización: "Agregar este conocimiento al repertorio implica que uno podrá referirse al mismo para una decisión o para la construcción de un nuevo conocimiento. Agregar un conocimiento producido por los protagonistas a su repertorio común supone (exige) que sea reconocido (por ellos) que este conocimiento es válido, que él servirá en otras ocasiones aún no conocidas, que será ventajoso entonces reconocerlo (no es evidente), y que él a menudo será aceptado como verdadero fuera del círculo restringido de los protagonistas de las situaciones de origen".

de profundizar especialmente en el significado de la institucionalización y en las condiciones adecuadas para su gestión.

BIBLIOGRAFÍA

- Berthelot, R. y M. H. Salin (1992): *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, tesis, Universidad de Bordeaux I, Francia.
- Brousseau, G. (1986): *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, n° 19, 1993.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- (1995): "Glossaire de didactique des mathématiques", en *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*, Copirelem, IREM d'Aquitaine & LADIST.
- (1998): *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1999): "Educación y didáctica de las matemáticas", en *Educación Matemática*, 12(1): 5-38, México.
- Gálvez, G. (1994): "La didáctica de las matemáticas", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- García, R. (2000): *El conocimiento en construcción*, Barcelona, Gedisa.
- Johsua S. y J. J. Dupin (1993): *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, París, Presses Universitaires de France.
- Margolinas, C. (1993): *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO Y DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN EN EL NIVEL INICIAL Y EL PRIMER AÑO DE LA E.G.B

Beatriz Ressia de Moreno

Todo conocimiento debe poseer una frescura y una novedad perpetuas, una inocencia siempre renaciente; sin lo cual el contacto de nuestro espíritu con lo real deja de ser sentido. El verdadero conocimiento debe descubrirnos el universo en cada instante, como si nos hiciera asistir a su génesis.

LOUIS LAVELLE, *La conscience de soi*

1. INTRODUCCIÓN

Es una realidad frecuente en el nivel inicial y el primer año de la EGB la coexistencia de diferentes enfoques en la enseñanza de los contenidos de la matemática. Este fenómeno no sólo es observable entre distintas instituciones sino que muchas veces ocurre dentro de una misma institución educativa. La diferencia de formación entre los docentes, como así también la carencia de espacios de reflexión sobre esas prácticas de enseñanza, son algunas de sus causas. Es mi intención, a través de este trabajo, ofrecer elementos de análisis que permitan plantear una discusión en torno a las diferentes concepciones que subyacen en cada enfoque de enseñanza vigente.

Realizar un análisis comparativo de dichos enfoques se torna necesario para poder luego desarrollar una propuesta de enseñanza del número y del sistema de numeración. Me propongo, además, brindar los aportes de numerosas investigaciones con el fin de constituir un marco referencial teórico imprescindible para que los docentes puedan hacer explícitos y al mismo tiempo consolidar los criterios a través de los cuales toman decisiones didácticas.

2. ACERCA DE LOS DIFERENTES ENFOQUES DE ENSEÑANZA

Toda práctica pedagógica está determinada por concepciones acerca de cómo se enseña y cómo se aprende (Baroody, 1988). Cada perspectiva refleja una creencia diferente acerca de la naturaleza del conocimiento, del modo en que se adquiere el conocimiento y de lo que significa saber acerca de algo. Estas concepciones muchas veces terminan por constituir teorías implícitas que condicionan y regulan el accionar docente, al no mediar espacios de reflexión que permitirían hacerlas explícitas. Reflexionar acerca de las distintas concepciones que cada uno de los enfoques vigentes tiene obliga a formularse, por lo menos, las siguientes preguntas:

- ¿Qué concepción de enseñanza-aprendizaje postula?
- ¿Qué idea de sujeto subyace?
- ¿Qué significa "saber" matemática?

2.1. Enseñanza clásica

En relación con la enseñanza de los números, uno de los enfoques arraigados en la práctica docente es el de la "enseñanza clásica". En ella se sostiene que hay que enseñar los números de a poco, uno a uno y en el orden que indica la serie numérica. No se puede presentar el 5 mientras no se haya enseñado el 4; no se puede avanzar más allá del 9 hasta que no se haya enseñado la noción de decena, etcétera. La escritura convencional de los números es central y, por lo tanto, escribir renglones del mismo número, dibujarlos, picarlos, pintarlos, etcétera, son actividades consideradas fundamentales. Una de las ideas principales es que el conocimiento entra por los ojos, imitando, copiando, observando. De esta manera, primero se enseñan las nociones para que luego sean aplicadas; es decir, se considera que los niños sólo pueden resolver problemas si previamente el maestro les ha enseñado los procedimientos canónicos, sean éstos la escritura convencional de los números, las cuentas, etcétera.

- *La concepción de aprendizaje* postula que aportando los estímulos necesarios los alumnos darán las respuestas esperadas; la progresión consiste en ir de lo simple a lo complejo, paso a paso. Se entiende el

aprendizaje como algo acumulativo, como la sumatoria de pequeñas porciones de saber adquiridas en pequeñas dosis. Se asume que lo más importante es el entrenamiento: es a través de la repetición y memorización de las nociones matemáticas como un sujeto —carente de todo saber— aprenderá.

- *La idea de sujeto* que subyace, por lo tanto, es la de un sujeto tabla rasa, es decir que no posee ningún conocimiento previo relacionado con los contenidos a enseñar. Sólo así puede comprenderse el que se comience la enseñanza desde el número 1.
Me parece importante poder plantearnos algunas paradojas en relación con estos supuestos. En primer lugar, suponer que un alumno de primer año de la EGB o de Nivel Inicial no se ha enterado de la existencia del número 1, es aceptar al mismo tiempo que no sabe cuántos años tiene, que su hermano tiene 2 años más que él porque ya tiene 7, que en cada paquete de figuritas vienen 6, que tenía 16 figuritas pero como ganó 3 en un partido, ahora tiene 19, que en la clase son 25 chicos, pero hoy faltaron 2 y por lo tanto son 23, etcétera; saberes de los que disponen muchos de los niños de esa edad. Por otra parte, en la misma clase se da a veces la contradicción de reconocerle al mismo alumno saberes previos en relación con la lengua escrita, como producto de su relación con un medio lleno de portadores de textos. ¿Es que en ese medio no existen también portadores numéricos? ¿O es que el niño sólo está capacitado para interesarse, reflexionar y construir hipótesis sobre la lectura y la escritura y no sobre las cantidades?
- *En cuanto a la concepción de lo que significa "saber" matemática*, la idea principal es que consiste en el dominio de los procedimientos formales. Un alumno "sabe" si escribe convencionalmente los números, si sabe hacer las cuentas, para luego aplicar ese conocimiento en la resolución de problemas. Desde esta perspectiva, los problemas no aparecen como medio de enseñanza, sino sólo como la "excusa" para practicar lo que ya se sabe (Panizza y Sadovsky, 1992). Es por esa razón que en el jardín de infantes se prioriza la enseñanza de los contenidos que se supone van a ser necesarios para que en el primer año de la EGB los alumnos aprendan a hacer las cuentas, las practiquen hasta dominarlas y luego las apliquen para resolver problemas. ¿Qué problemas? Por ejemplo:

"Juan tenía 2 pesos, su mamá le regaló 2 pesos *más*. ¿Cuántos pesos tiene ahora en *total*?"

La inclusión de palabras "índice" que permiten que un alumno "sepa" que hay que sumar, es coherente con la concepción de matemática que se asume. Si lo importante es que practique la cuenta de suma, porque eso es saber matemática, entonces el problema tiene que mostrar claramente que "es de más".¹

Las secuencias de enseñanza se organizan de la misma manera. Si un alumno hace meses que practica una misma cuenta, y aparece un problema, el alumno ya "sabe" que el recurso para resolverlo es esa misma cuenta.

La utilización de títulos del estilo "¡A sumar!" y "¡Qué bien restamos!" que encabezan los problemas son de tal elocuencia que me eximen del análisis.

2.2. La reforma de la "matemática moderna"

Otro de los enfoques que coexisten en la enseñanza es el que deriva de la *reforma de la matemática moderna*.

Con la intención de utilizar las construcciones que la matemática creó para resolver problemas que son internos a la disciplina misma, se trasladan al aula —de la mano de los formadores de maestros, los libros de texto, el currículo, etcétera— ciertos aspectos de la teoría de conjuntos.²

Desde este enfoque, se enseña el número como una propiedad de los conjuntos en tanto clases de equivalencias, razón por la cual una de las actividades más comunes es presentar, por ejemplo, dibujos de conjuntos con cuatro flores, cinco autos, cuatro mariposas y cinco globos cada uno, para que los alumnos hallen por correspondencia término a término los conjuntos que tienen la misma "propiedad numérica". Esto se basa en la suposición de que los niños aprenden los números por observación de conjuntos de objetos o imágenes. Si fuera así, ¿cómo se podría comprender el número 3.700.000 si nunca hemos visto o contado 3.700.000 cosas dentro de un conjunto o fuera de él? (Kamii, 1984).

1. Véanse los capítulos 1 y 6 en este volumen.

2. Para ampliar la comprensión acerca de esta traslación, véase el capítulo 4 en este volumen.

La noción de número desde esta concepción se entiende como la síntesis entre las operaciones de clasificación y de seriación. Se supone que con estas actividades lógicas los niños pueden apropiarse de los conocimientos previos necesarios para aprender el número. La idea central es que "los niños no pueden utilizar los números en el trabajo numérico". Esta aseveración (como mínimo confusa) plantea entonces la necesidad de una etapa previa prenumérica —clasificar, seriar, establecer correspondencias término a término—, a través de la cual los alumnos construirían la noción de número y sin la cual no podrían utilizarlos.

- La *concepción de enseñanza-aprendizaje* de este enfoque tiene como referente teórico el desarrollo que sobre la pregunta "¿Cómo se incrementan los conocimientos?" hizo Jean Piaget a través de la psicología genética. Esta pregunta fundamental tuvo por objeto construir una teoría del conocimiento y de ese modo terciar entre el innatismo y el empirismo, las dos corrientes epistemológicas de su época, que explicaban la adquisición de conocimientos como percibidos del medio por un organismo pasivo (empirismo) o como "pre-programados" desde el nacimiento, de manera tal que el sujeto se los apropiaría necesariamente si se produjeran ciertas condiciones en el medio (innatismo).

Las investigaciones que Piaget y sus colaboradores llevaron a cabo sobre la psicogénesis del número —entre otras— le permitieron postular que el conocimiento era el resultado de una construcción llevada a cabo por medio de las interacciones de un sujeto con la realidad. Sin embargo, no hay nada en toda su obra que se refiera a un estudio científico sobre la enseñanza. Si se abocó al estudio de los niños, fue para encontrar un medio que le permitiera responder científicamente las cuestiones epistemológicas.

Como explica Brun (1994): "La psicología genética establece entonces, en su origen, una relación de exterioridad con la investigación sobre la enseñanza". Dicho de otro modo, la teoría de Piaget no implica un modo diferente de enseñar matemática. Tiene objetivos y metas distintas. Piaget se ocupó de estudiar las grandes categorías del conocimiento como el espacio, el tiempo, la causalidad, la longitud, etcétera para poder comprender y describir los procesos de constitución de los conocimientos. A pesar de esto, la transposición directa de la teoría de Piaget al aula es un hecho recurrente.

En lugar de tomar a la psicología genética como una teoría creada para comprender los grandes mecanismos del desarrollo, y en ese sentido usarla como una teoría de referencia, se la toma como si fuera una teoría general del aprendizaje, y es por esta razón que las nociones operatorias y la conservación de las cantidades pasan a ser contenidos de enseñanza y prerrequisito para poder utilizar los números. A diferencia del enfoque clásico, en el que el acento está puesto en el entrenamiento de procedimientos formales, aquí se prioriza el aprendizaje de relaciones lógicas entre conjuntos de elementos (clasificación, seriación, número como síntesis de ambos), para lo cual se promueven actividades homónimas en el aula.

Para Piaget, el conocimiento –incluido el matemático– es producto de la adaptación del sujeto a su medio. El principal factor que incide sobre el proceso de conocimiento es la acción.

El énfasis puesto sobre la construcción activa del conocimiento tiene desde hace años implicancias importantes sobre la enseñanza, muchas veces tergiversando el sentido mismo de la teoría de Piaget. En primer lugar, el concepto de “acción” ha sido víctima de malentendidos. A veces se supone que la acción referida por Piaget consiste en la manipulación de material concreto por parte de los alumnos, es decir, en acciones materiales. Sin embargo, las acciones –en el sentido piagetiano– son actividades propias de los sujetos que no se limitan a acciones materiales y que tienen siempre como encuadre una finalidad determinada dentro de un proceso dialéctico de pensamiento y acción (Charnay, 1994).

Al suponer que los aprendizajes se darán por el solo hecho de manipular material concreto, se promueven situaciones en las que el maestro le “dicta” el procedimiento a seguir al alumno, diciéndole, por ejemplo, frente a un problema aditivo, “poné 4 fichas, ahora poné 5 fichas más, ahora contalas todas”. En ese caso, no es el alumno el que realiza una elección dentro del repertorio de sus conocimientos en función del problema planteado y, por lo tanto, el proceso dialéctico de pensamiento y acción no se produce.

En segundo lugar, otra tergiversación en la interpretación de la teoría es la creencia de que los alumnos aprenden porque construyen el conocimiento de manera “natural”, sólo a través de las acciones que despliegan. Si fuera así, ¿qué rol desempeñaría el maestro? ¿Un medio sin intenciones didácticas sería capaz de inducir en el alumno todos los co-

nocimientos culturales que se desea que él adquiriera? Si no se asume una intencionalidad didáctica, el peligro pedagógico consecuente es el de suponer que hay que cruzarse de brazos y esperar hasta que el sujeto construya las estructuras operatorias definidas por medio de la lógica (lógica de clases y de relaciones) y de esta manera vaciar al aula de contenidos de enseñanza.

Las consecuencias descriptas son el resultado de haber tomado las investigaciones de Piaget como si se tratara de una teoría general de la enseñanza y del aprendizaje que puede pautar normas para la enseñanza de contenidos escolares.

Esta posición “aplicacionista” (Brun, 1994) –bajo el supuesto de que eso es el constructivismo– provocó que la escuela desconociera la principal función de su existencia, esto es, garantizar a las futuras generaciones la transmisión de los conocimientos socialmente relevantes que la humanidad ha construido y sigue construyendo desde hace siglos.

La legitimidad de un contenido de enseñanza no puede depender solamente de la iniciativa del maestro, sino que debe aparecer como legítimo a los ojos de la sociedad. En ese sentido, ¿es un conocimiento socialmente relevante la génesis de la conservación de las cantidades o es privativo de un pequeño sector vinculado con la psicopedagogía?

Por otra parte, las investigaciones de Piaget que se toman como referente son *justamente* las que demuestran que no es necesaria una enseñanza sistemática para lograr que los niños accedan a la conservación de las cantidades.

- ¿Cuál es la idea de sujeto que subyace a este enfoque? Más arriba se vio que los trabajos de Piaget estaban dirigidos hacia la comprensión del desarrollo cognitivo. Por ende, la *idea de sujeto* que subyace en la postura “aplicacionista” es la de un sujeto psicológico acerca del cual interesan fundamentalmente sus procesos cognitivos y sus estructuras cognitivas, es decir, si es conservador de cantidades, pesos, etcétera; si ha logrado la estructura operatoria de una determinada noción; si a partir de los conflictos que se le plantean se producen los desequilibrios que darán lugar a las reequilibraciones generadoras del avance cognitivo. Todo esto independientemente de los contenidos de enseñanza. En definitiva, desde esta postura, el sujeto no se constituye como alumno. Como se verá después, para que esto sea posible es necesario, además,

ampliar el interés a todos los demás componentes de la situación de aprendizaje: un medio didáctico en el que participan el sujeto, sus saberes previos, las intervenciones del maestro, las características del saber a enseñar, las interacciones con el resto de la clase, etcétera.

- Por último, desde esta concepción, *saber matemática* significa poder establecer relaciones lógicas entre conjuntos. Se considera al lenguaje de la teoría de conjuntos como el más adecuado para que los niños comprendan los números a través de las relaciones lógicas aplicadas sobre conjuntos de elementos (inclusión de clases y relaciones asimétricas). El número se entiende como la síntesis entre las operaciones de clasificación y seriación. Ahora bien, podemos preguntarnos: ¿clasificando y seriando un alumno establece relaciones numéricas?

Cuando clasificamos, por ejemplo, vacas, perros y caballos, ¿qué propiedades de esos objetos hay que poner en relación para poder "poner junto lo que va junto"? Básicamente las propiedades cualitativas: las vacas van con las vacas y no con los perros porque son diferentes en forma, tamaño, etcétera. Por lo tanto, las propiedades *cuantitativas* no son tenidas en cuenta. De hecho, si alguien se centrara en ellas y contara cuántos animales hay, probablemente no podría clasificarlos.

En cuanto a la seriación, ordenar de menor a mayor una serie de varillas, por ejemplo, requiere elegir de todas ellas la más pequeña, luego la más pequeña de las sobrantes y así sucesivamente. Esta situación no garantiza que un alumno vaya a establecer una relación ordinal numérica entre las varillas pensando a medida que coloca cada una de ellas que es la primera, la segunda, la tercera, etcétera, sino que solamente pensará en la que es más chica, luego en la que es un poquito más grande, a continuación en la que le sigue, y así sucesivamente.

En resumen, clasificando y seriando se establecen relaciones cualitativas y no cuantitativas sobre los objetos. Por lo tanto, no aparecen como objeto de conocimiento ni el número, ni su denominación, ni sus diferentes contextos de utilización, ni la regularidad y organización del sistema de numeración, etcétera. Esto no significa que ya no deban plantearse situaciones de clasificación y seriación en la escuela. Se trata, sí, de reconsiderar las virtudes prenuméricas de estas actividades. Lo que se cuestiona es la razón por la cual este tipo de situaciones podría preparar a los alumnos para las competencias numéricas.

De todos modos, es prácticamente imposible vivir sin realizar clasificaciones y ordenaciones. Cuando un niño guarda un rompecabezas en la caja del rompecabezas o los pinceles en la caja de los pinceles, está haciendo una clasificación, aunque no sea consciente de ello. Del mismo modo, cuando realizan "torres" con cubos de diferente tamaño están realizando una seriación que garantiza la estabilidad de la construcción (Brissiaud, 1987).

Por otra parte, actualmente hay numerosas investigaciones que demuestran que el lenguaje de la teoría de conjuntos —portador de una enorme abstracción matemática— es inaccesible para los niños y no permite ser vinculado con los saberes de los que disponen, contruidos en la interacción con un mundo extraescolar en el que nadie habla ni representa cantidades mediante conjuntos.

Los desvíos de sentido que se han producido sobre la psicología genética no implican que haya que desconocer los invalores aportes que Piaget y sus continuadores ofrecen. Los resultados de esas investigaciones aportan conocimientos que es necesario integrar, tomándolos como referencia, a un cuerpo teórico específico que tiene como objeto de estudio la enseñanza escolar de la matemática; este cuerpo teórico es la *didáctica de la matemática*.

2.3. Didáctica de la matemática

El principal interés de la didáctica es estudiar y describir las condiciones necesarias para favorecer y optimizar el aprendizaje, por parte de los alumnos, de los contenidos de enseñanza de la matemática. Se ocupa entonces de estudiar los sistemas didácticos: alumno, docente, saber y las interrelaciones entre estos componentes dentro de un contexto caracterizado por la intencionalidad de incidir sobre los conocimientos previos de los alumnos para hacerlos avanzar hacia los saberes que la escuela intenta transmitir.

- ¿Cuál es la concepción de enseñanza-aprendizaje de la didáctica de la matemática?

Como hipótesis sobre la adquisición de conocimientos, la didáctica de la matemática de la escuela francesa adopta la idea central de Piaget,

según la cual los conocimientos no se producen solamente por la experiencia que el sujeto tenga sobre los objetos, ni tampoco por una programación innata preexistente en él, sino por construcciones sucesivas que se dan por la interacción de ese sujeto con el medio. Estos conceptos fundamentales, como ya vimos, no son, sin embargo, suficientes para explicar el complejo acto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Construir un aprendizaje en clase cuyos resultados sean previsibles, por lo menos con una alta probabilidad, y cuyas particularidades sean reproducibles, exige un análisis riguroso de la relación entre la enseñanza y el aprendizaje, de la cual no se ocupa la psicología genética, pero sí la didáctica de la matemática, que la considera uno de sus objetos de estudio esenciales. Así, el objetivo central de la didáctica es poder identificar las condiciones en las que los alumnos movilizan saberes bajo la forma de herramientas que conduzcan a la construcción de nuevos conocimientos matemáticos. En este sentido, además de la transformación de los conocimientos, la didáctica se ocupa de las transformaciones que corresponden a los fenómenos de transmisión cultural, es decir, a los saberes socialmente reconocidos, comunicados a través de instituciones, en particular la escuela, portadora de la intencionalidad de enseñar. Al poner el énfasis en los contenidos de enseñanza, la didáctica asume al mismo tiempo la complejidad total del acto de aprendizaje, inmerso en un medio que comprende los contenidos, el alumno, sus saberes, el maestro, la intencionalidad didáctica, las situaciones didácticas, la institución, etcétera.

La didáctica puede dar respuestas sobre la enseñanza porque es su objeto propio, incluyendo para esto el saber matemático constituido, mientras que "las matemáticas que se discuten en la epistemología genética conciernen [...] al estudio de las grandes categorías del conocimiento en el sentido kantiano" (Brun, 1994).

Brousseau (1986) define así su concepción de aprendizaje:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje [...].

Esta concepción de aprendizaje toma de la teoría de Piaget el fundamento de que el conocimiento se construye a través de la acción de un alumno enfrentado a situaciones que le provocan desequilibrios. Estos desequilibrios se producen si existe una situación que el alumno tenga que resolver, pero además si dispone de algunos conocimientos de base para enfrentar el problema que al mismo tiempo se muestren insuficientes.

Los límites de su saber frente a la situación son los que provocan que el sujeto ponga en duda sus conocimientos y se aboque a la búsqueda de nuevas formas de resolución. ¿Qué desequilibrio le provocaría a un sujeto la resolución de un problema si en la consigna o en la intervención del maestro está explícito lo que hay que hacer? En ese caso, ¿quién actúa: el alumno o el docente?

Todo conocimiento nuevo se construye apoyándose sobre los conocimientos previos, a los que al mismo tiempo modifica. En la interacción que un alumno despliega con la situación de enseñanza, utiliza sus conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los rechaza o los completa, los redefine, descubre nuevos contextos de utilización y de esa manera construye nuevas concepciones. Este proceso dialéctico descarta toda ilusión de una construcción lineal del conocimiento, en el sentido de suponer que se los favorece estableciendo una secuenciación que vaya de los más simple a lo más complejo.

Charnay (1994) dice:

Los conocimientos no se apilan, no se acumulan, sino que pasan de estados de equilibrio a estados de desequilibrio, en el transcurso de los cuales los conocimientos anteriores son cuestionados. Una nueva fase de equilibrio corresponde entonces a una fase de reorganización de los conocimientos, donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado. Así, un nuevo saber puede cuestionar las concepciones del alumno originadas por un saber anterior: por ejemplo, el estudio de los decimales debería conducir al alumno a cuestionar la idea de que la multiplicación "agrande" siempre (idea que él ha podido elaborar estudiando los naturales).

En suma, se considera al aprendizaje como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar (Brousseau, 1986).

- *¿Cuál es la idea de sujeto dentro del marco de la didáctica de la matemática?*

La didáctica de la matemática hace entrar en escena al alumno, a ese niño que al estar "sujeto" al orden de la institución escolar (Chevallard, 1992) se convierte en sujeto didáctico: aquel que frente a las situaciones que le plantea el maestro realiza una búsqueda dentro de todo lo que sabe para decidir qué es lo más pertinente y ponerlo en juego.

El trabajo del maestro consiste, por lo tanto, en proponer al alumno situaciones de aprendizaje para que produzca sus conocimientos partiendo de la búsqueda personal de los procedimientos que le permitirán encontrar la respuesta al problema planteado. La resolución de la situación pone en juego las herramientas de las que dispone el alumno. El que las haga funcionar o las modifique no depende del deseo del maestro, sino de la resistencia que le ofrezca ese medio.

Para que un sujeto se constituya como sujeto didáctico, es decir, se implique en la resolución de un problema de manera independiente al deseo del maestro es necesario que tenga un proyecto (implícito) de aprendizaje y acepte su responsabilidad (Perrin-Glorian, 1993).

No será esto posible si piensa que el trabajo en la hora de Matemática consiste en hacer lo que se le pide tal y como se lo enseñaron previamente, o que lo que produce sea algo que se hace para luego ser abandonado sin que se pueda establecer ningún vínculo con lo precedente o los aprendizajes futuros, o que su trabajo es importante realizarlo solamente para "pasar de grado", "para que mi mamá se ponga contenta", etcétera.

Es el maestro quien puede lograr que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje, siempre y cuando no esté dispuesto a darle indicios que lo ayuden a averiguar con menor costo la respuesta que está esperando de él. Muchas veces, como producto de estas "ayudas", el alumno logra una respuesta correcta sin haber puesto en juego sus conocimientos. La trampa que encierra esto es suponer que el alumno ha aprendido, la decepción surge cuando frente a una nueva situación se evidencia la ausencia de ese saber.

Al proceso por el cual el docente intenta que la resolución de un problema sea responsabilidad del alumno —que es quien debe hacerse cargo de la obtención de un cierto resultado como respuesta a las exigencias del medio y no al deseo del maestro—, Brousseau lo denomina *devolución* (Brousseau, 1994).

La devolución es una condición necesaria si se asume que el alumno construye conocimientos nuevos al adaptarse a un medio que le genera desequilibrios. Se busca que el alumno funcione de manera científica a través de sus acciones, y no como un mero ejecutor de instrucciones externas. Para aceptar su responsabilidad en lo que produce, el alumno debe poder considerar lo que hace como una elección entre diferentes posibilidades, para así poder establecer una relación de causalidad entre las decisiones que ha tomado y sus resultados. La situación debe permitir, en la búsqueda previa a la toma de decisión, una anticipación de los resultados que tal elección va a determinar. Son las anticipaciones que el alumno produce las que le permiten una resolución basada en sus propios saberes y no en intervenciones externas.

[...] si la respuesta se debe exclusivamente a las virtudes de la situación, nada debe a las "virtudes" del alumno. Dicho de otro modo, se debe definir la distancia que hay entre la determinación, por parte de la situación, de lo que el alumno debe hacer y la determinación, por parte del alumno, de lo que debe ocurrir (Brousseau, 1994).

Se trata, entonces, de que los alumnos aprendan haciendo funcionar el saber. Es decir, que para el alumno el saber aparezca como un medio de seleccionar, anticipar, realizar y controlar las estrategias que utiliza para resolver la situación que se le ha planteado.

- *¿Qué se entiende por "saber matemática" en el marco de la didáctica de la matemática?*

Desde este enfoque, un sujeto sabe matemática si ha podido construir el *sentido de los conocimientos* que se le enseñan (Charnay, 1994). Construir el sentido de un conocimiento implica dos niveles:

- Un nivel sintáctico (o interno) que permite comprender el funcionamiento de una determinada noción, por ejemplo: cómo es la organización y la regularidad de la serie numérica; qué relaciones hay que establecer para contar objetos utilizando la serie; cómo funciona un algoritmo (por qué "me llevo" o por qué "le pido al de al lado"); por qué esa cuenta lleva al resultado buscado, etcétera.
- Un nivel semántico (o externo) que le permite al sujeto reconocer qué tipo de problemas resuelve ese conocimiento, para cuáles otros no es adecuado, etcétera.

La cuestión central en la enseñanza de la matemática es, entonces, cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para los alumnos. Así lo explica Charnay (1994): "el alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas".

Hacer aparecer cada noción matemática como una *herramienta* para resolver problemas es lo que permitirá a esos alumnos construir el sentido del conocimiento en juego. El eje fundamental es la resolución de problemas. ¿Por qué enseñar matemática a través de problemas? Porque es la búsqueda de las soluciones a los problemas y las reflexiones sobre ellos lo que genera los conocimientos.

En primer lugar, la construcción del edificio matemático da cuenta de esto. La producción de conocimiento ha tenido y tiene el objetivo de resolver problemas para cuya solución los saberes disponibles no son suficientes. Esos problemas pueden ser de distinta índole. La matemática ha producido y produce herramientas para resolver problemas de la vida cotidiana, problemas inherentes a otras ciencias —como la arquitectura, la física o la economía— y también problemas internos a la matemática misma.

En segundo lugar y en relación con la enseñanza, si la escuela espera que los alumnos sean capaces de identificar el procedimiento que resuelve un problema para luego realizarlo, ¿cómo harán para identificarlo si nunca antes se han enfrentado a ese tipo de problemas?

Es conveniente tener en cuenta que la enseñanza tradicional se centra a menudo básicamente en los aspectos sintácticos, pero desde un enfoque que limita la enseñanza a una reproducción de métodos, sin ocuparse de la construcción del sentido en ninguno de los dos niveles.³ No se tiene en cuenta que un alumno "especialista en métodos", pero que no puede decidir a la hora de resolver un problema cuál de todos esos procedimientos de los que dispone es el más conveniente, sabe en tal caso un aspecto de la matemática, pero no lo suficiente.

Preguntas del tipo "Seño, ¿cómo lo hago?" o "¿Es de más, de menos, de por?", ponen en evidencia la carencia de sentido que para ese alumno tiene lo que ha aprendido.

3. Para profundizar este análisis, véase el capítulo 1.

Se forman alumnos especialistas en hacer cuentas cuando la humanidad ha inventado las máquinas calculadoras que son, hoy en día, un bien de uso social. Esas máquinas pueden tener las funciones más complejas, pero lo que la ciencia no ha inventado aún es una máquina que le diga a un sujeto qué tecla hay que presionar. ¿Para qué le sirve a un alumno una máquina si no puede darle las órdenes necesarias a menos que una especie de "cerebro anexo" le vaya diciendo "ahora sumá", "ahora restá"?

De ningún modo pretendo que se desprenda de aquí la implicación pedagógica de que no es importante que los alumnos aprendan a hacer las cuentas. Todo lo contrario. Pero lo que sí me interesa destacar es la paradoja que la escuela a veces provoca, al priorizar la enseñanza de un aspecto de la matemática que limita a los alumnos en su desempeño tanto escolar como extraescolar.

3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¿Qué se entiende por problemas dentro de la didáctica de la matemática?

La didáctica de la matemática define los problemas como aquellas situaciones que generan un obstáculo a vencer, que promueven la búsqueda dentro de todo lo que se sabe para decidir en cada caso qué es lo más pertinente, forzando así la puesta en juego de los conocimientos previos, y mostrándolos al mismo tiempo insuficientes o muy costosos. Rechazar los no pertinentes e implicarse en la búsqueda de nuevos modos de resolución es lo que produce el avance en los conocimientos.

Los problemas destinados al aprendizaje de un nuevo conocimiento matemático deben permitir que se genere una interacción entre el alumno y la situación. Para organizar su actividad de resolución, el alumno deberá buscar entre todos sus conocimientos matemáticos aquellos que le parezcan pertinentes, tomar las decisiones que correspondan a la elección de éstos, anticipar posibles resultados, etcétera.

¿Cuál sería el obstáculo al que se enfrentaría un alumno si los problemas que se le ofrecen son siempre los mismos? ¿Por qué se implicaría en la búsqueda de nuevos modos de resolución si con lo que sabe le alcanza?

¿Cómo podría decidir qué procedimiento utilizar si el maestro le "dicta" lo que debe hacer? El aprendizaje termina en este caso por convertirse en un acto de "fe": hay que realizar procedimientos porque el maestro lo pide, tal y como los pide.

3.2. *La puesta en aula de los problemas*

No se aprende matemática solamente resolviendo problemas. Es necesario, además, un proceso de reflexión sobre ellos y también sobre los diferentes procedimientos de resolución que pudieran haber surgido entre los integrantes de la clase.

Así como el conocimiento debe permitir tomar decisiones frente a un problema que hay que resolver, también debe permitir comunicar los procedimientos elegidos; defender y validar lo hecho; confrontar y comparar con lo que hicieron otros⁴ y también debe permitir reconocer la relación que ese conocimiento tiene con los saberes culturales que la escuela intenta transmitir.

La comunicación de informaciones entre los alumnos, de las producciones diferentes que hayan surgido a través de un trabajo individual o en pequeños grupos es también constitutiva del sentido del conocimiento matemático. No se trata solamente de que el maestro introduzca situaciones que permitan que sus alumnos actúen, sino también de que propicie y favorezca el análisis, la discusión y la confrontación entre las diferentes concepciones y producciones que hubieran podido surgir tanto en el proceso de resolución como al término del mismo.

Comunicar una resolución permite hacer explícito lo que era implícito y hace posible el reconocimiento de ese conocimiento por parte del sujeto. Informar sobre lo producido implica necesariamente la reconstrucción de la acción realizada.

El hecho de tener que explicar las acciones hace que aparezca asociado el problema del lenguaje. Se requiere la utilización de un lenguaje que per-

4. Suponiendo que se trata de una situación didáctica de acción, no estoy proponiendo la necesidad de pasar por situaciones de formulación y de validación (véase el capítulo 2). La "formulación" y la "confrontación" de las que hablo aquí atañen a los procesos que pueden gestionarse en momentos posteriores a la resolución de problemas y que han mostrado ser fructíferos en la construcción del conocimiento.

mita explicar las acciones vinculadas a una resolución matemática, cuidando de que sea lo más claro posible para poder ser comprendido por los compañeros. Ese lenguaje, por otra parte, deberá adecuarse a las particularidades que la situación exija. Esta reconstrucción de la acción promueve el contacto con los diferentes procedimientos de resolución que hayan podido surgir entre los compañeros, lo que le permite a un alumno obtener ciertas informaciones sobre la situación que quizás no había anticipado por no disponer de los medios de acción suficientes. Por ejemplo, descubrir otros modos de resolución para la misma situación –todos ellos correctos–, caminos menos costosos, errores en sus propias concepciones o en las de otros, etcétera.⁵

Estas acciones y su comunicación no se refieren exclusivamente a la actividad solitaria de un alumno. Si la resolución del problema se realiza en pequeños grupos, entonces se establece un trabajo en colaboración, lo cual es considerado esencial para el aprendizaje, ya que permite la definición común de la situación y del problema (Gilly, Roux y Trognon, 1999). El análisis conjunto no es entendido como la sumatoria de los recursos individuales puestos en juego por los participantes, sino como una construcción conjunta, original y emergente de la dinámica interactiva, que se produce a través de las interacciones verbales que los niños realizan al defender la comprensión que cada uno hizo del problema y la propuesta de qué camino seguir. Así, la solución resulta de una construcción conjunta en el curso de la cual cada etapa de la resolución está determinada por la etapa precedente de intercambios verbales. Dicho de otro modo, el surgimiento de una idea en un participante estaría posibilitada por las ideas anteriores tanto propias como de los otros participantes con los que interactúa.

En suma, la circulación del saber –sea durante la resolución del problema o a continuación de la resolución– permite la toma de conciencia sobre lo que ya se sabe y de los límites de este saber. Posibilita la apropiación de estrategias utilizadas por otros que se evidencian como más adecuadas, explicita los errores recurrentes, etcétera. De este modo, favorece la construcción del sentido y, por lo tanto, el aprendizaje de los contenidos de enseñanza.

Por otra parte, el hecho de tener que defender lo producido exige al alumno elaborar argumentaciones y pruebas para demostrar la validez de sus

5. Véase el capítulo 6 de Quaranta y Wolman.

afirmaciones de una forma que no sea a través de la acción. No basta con la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto, hay que explicar que necesariamente es así. Al dar pruebas y ejemplos de lo que afirman, los errores —si los hubiera— son debatidos grupalmente, lo que favorece una mayor toma de conciencia de los mismos.

La validación es central en el proceso de aprendizaje de la matemática, ya que es a través de ella como los conocimientos pueden ser reconocidos como falsos o insuficientes, con lo que será necesario buscar nuevos procedimientos y, en consecuencia, se construirán conocimientos adaptados a los requisitos del problema.

La situación juega un rol importante en la instancia de validación. Si el problema que se le plantea al alumno “garantiza” a priori que los procedimientos de los que dispone van a ser suficientes, el alumno no necesitará modificar sus conocimientos. Una situación concebida para producir un aprendizaje por adaptación debe demostrarle al sujeto la no validez o la insuficiencia de sus procedimientos para resolver la situación. Si un alumno sostiene que la utilización de “palitos” es la mejor estrategia para resolver los problemas aditivos y el maestro plantea situaciones en las que están involucrados cálculos del tipo “ $4 + 5$ ”, ¿por qué ese sujeto va a abandonar ese procedimiento si con esas cantidades es absolutamente funcional? En cambio, si el maestro aumentara las cantidades en juego, la situación enfrentaría a ese alumno con los límites de su conocimiento, generando así la necesidad de buscar otros procedimientos menos costosos, con menor riesgo de cometer errores, etcétera.

Las producciones de los alumnos son así una información sobre su “estado de saber” (Charnay, 1994). En este sentido, desde la concepción constructivista del aprendizaje, el error es fecundo y juega un rol constructivo en la adquisición de conocimientos. En particular, el error no se entiende como la ausencia de saber, ni tampoco como un hecho negativo que no debería formar parte de la realidad escolar.

Cuando el alumno se enfrenta a un conocimiento nuevo para él, lo hace desde sus propias concepciones, desde ciertas maneras de conocer que le han sido útiles en otros contextos, y es sobre ese mismo conocimiento “viejo” que el alumno deberá construir el nuevo. ¿Cómo llevar adelante esa tarea cuando no ha podido confrontar la representación que él hizo del problema con otras diferentes y en particular tomar conocimiento de sus posibles errores?

En la enseñanza tradicional, después de la resolución del problema, el alumno accede a la corrección individual por parte del maestro. El alumno resuelve y, luego del tiempo necesario para que el maestro corrija, recibe una valoración de su producción con conceptos que pueden variar entre “muy bien”, “regular”, “rehacer”, etcétera. Pero, ¿qué información le da al alumno la corrección en relación a su resolución? ¿Cómo hace para distinguir si se equivocó en el procedimiento que eligió para resolver el problema o si lo que está mal es el resultado que obtuvo? La ilusión que está detrás de este tipo de prácticas es suponer que un alumno por el sólo hecho de observar lo producido, va a poder modificar su acción.

En otros casos, se propone la “autocorrección”. El maestro muestra la resolución correcta en el pizarrón y los alumnos verifican si lo hicieron igual o no. Los que coincidieron con el procedimiento elegido por el maestro evalúan su producción como correcta, los que utilizaron otro procedimiento —aunque el resultado sea el mismo—, copian la resolución “oficial”, otorgándole un *status* de mayor validez. Por ejemplo, si el problema fuese: “Jugando un partido, Lucía ganó 4 figuritas, ahora tiene 16, ¿cuántas figuritas tenía cuando comenzó a jugar?”, podrían aparecer diferentes resoluciones. Algunos alumnos lo interpretarían como un problema de suma en el que se desconoce uno de sus términos ($x + 4 = 16$) y a través de tanteos buscarían qué número sumado a 4 da 16. Otros lo interpretarían como un problema de resta ($16 - 4 = 12$). En ambos casos los procedimientos son válidos, pero si el maestro escribe en el pizarrón sólo la resta, los alumnos que sumaron pensarán que su decisión no fue la acertada. De este modo se aleja la posibilidad de entender que, en matemática, un mismo problema puede ser resuelto con diferentes conocimientos y que un mismo conocimiento puede resolver distintos problemas. Por último, los que no llegaron al resultado esperado se califican con “mal” y copian el procedimiento del pizarrón. Al no mediar ninguna reflexión acerca de la no pertinencia de su producción, ¿cómo podrían transformar el conocimiento? Nuevamente el aprendizaje se transforma en una cuestión de “fe”: se hace de esta manera porque el maestro lo dice.

Por otra parte, si el maestro es el único que se hace cargo de esta tarea, ¿el alumno se estaría haciendo cargo de las consecuencias de su acción? La devolución se entiende como un proceso no sólo necesario para que el alumno se haga cargo autónomamente de la resolución del problema, sino que también involucra al juicio del alumno sobre los resultados de su acción.

Otra práctica frecuente, desde otro enfoque, es la prescripción, es decir, que el maestro ponga como condición de trabajo, por ejemplo, la prohibición del uso de los palitos; el alumno nuevamente se enfrenta así a un aprendizaje cuyo sentido es cumplir con el deseo del maestro y no el de construir nuevas herramientas que le son necesarias para poder afrontar los problemas que se le plantean.

En el conjunto de interacciones que se dan entre los alumnos y el docente a propósito de un conocimiento, se han descripto momentos en los que los alumnos deben actuar para resolver problemas y momentos en los que deben comunicar, argumentar y validar sus producciones. Sin embargo, éstos no son suficientes para consolidar una situación didáctica. Son indispensables, además, aquellos momentos en los que el docente dará un estatuto oficial a los conocimientos en juego. Así, el saber construido por los alumnos al actuar, comunicar y validar aparece connotado con una valoración de saber cultural socialmente establecido. Esto significa otorgar a ese conocimiento el rango de un saber reutilizable, aun en contextos diferentes del que le dio origen, constituyéndose de ese modo en herramienta.

Detengámonos un momento. Al producir un conocimiento nuevo, los matemáticos no explicitan el complejo proceso por el cual ese conocimiento fue creado. No comunican ni los problemas particulares que generaron la necesidad de esa herramienta, ni las preguntas que se plantearon, ni las anticipaciones, marchas y contramarchas que realizaron, etcétera. Comunican el saber fuera de todo contexto, buscando la manera más general, despersonalizada y atemporal posible, para que pueda ser integrado al edificio matemático (Brousseau, 1986). Esto se refleja en los currículos y programas escolares, donde los conocimientos aparecen enunciados de manera aislada, definidos conceptualmente y fuera de toda situación.

Desde la perspectiva de enseñanza de la didáctica de la matemática, el problema se plantea de manera opuesta. Si lo que se quiere lograr es que un alumno construya con sentido el saber que se le transmite, el maestro tendrá que contextualizar ese conocimiento realizando un proceso similar al que llevaron adelante los productores originales de ese saber (Brousseau, 1986). Tendrá entonces que permitir a los alumnos interactuar con los problemas que requieren de esa herramienta, probar, descartar, reintentar, modificar, etcétera.

Una de las razones por las que la humanidad inventó los números es un buen ejemplo de lo anterior. Cuando aún no existían los sistemas de numeración, la gente utilizaba otros recursos para resolver problemas. Los pastores, por ejemplo, utilizaban bolsitas de cuero y piedras para controlar —estableciendo una relación término a término— que todas las ovejas que habían salido a pastar estuvieran de vuelta en el corral. Para eso, cada vez que salía una oveja (para ellos el concepto “una” no existía) entraba una piedra en la bolsa, salía otra oveja y entraba otra piedra, y así sucesivamente. Al cabo del día realizaban la operación inversa, entraba una oveja en el corral y salía una piedra, y así siguiendo. Si la bolsita quedaba vacía, entonces la tarea estaba terminada; si no, había que salir a buscar tantas ovejas como piedras quedaban. A medida que la cantidad de ganado se fue incrementando, ese procedimiento dejó de ser eficiente para resolver ese y otros problemas. La humanidad, entonces, inventó los números y con ellos, entre otras cosas, la posibilidad de cuantificar cantidades.

Este recorte de la historia de la creación de los números nos permite ver claramente cómo los niños construyen este conocimiento de manera similar, ya que una de las estrategias más utilizadas por ellos en el jardín de infantes para comparar colecciones de objetos es, justamente, la correspondencia término a término. Si se incrementan las cantidades puestas en juego en situaciones didácticas pensadas con la intención de incidir sobre los conocimientos previos, los niños, al igual que lo hizo la humanidad, se apropiarán del conteo.

Llegado a este nivel, el alumno no sabe que ha producido un conocimiento que podrá utilizar en otras ocasiones. Para transformar sus respuestas y conocimientos en *saber*, al resolver diferentes situaciones en donde el conteo sea herramienta, el alumno deberá, con la ayuda del maestro, redespersionar y redcontextualizar el saber que ha construido en un contexto particular, para poder reconocer en lo que ha hecho algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable (Brousseau, 1986). Como veremos más adelante, en este caso se trataría de poder reconocer el conteo como una herramienta eficiente no sólo para comparar colecciones, sino para resolver un campo de problemas más amplio.

No obstante, es el maestro quien, al resaltar ese saber producido previsto en los objetivos (institucionalización), lo tornará en un saber reutilizable. Dice Brousseau (1986):

La toma en cuenta "oficial" por el alumno del objeto de conocimiento y por el maestro del aprendizaje del alumno es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización.

Muchas veces se confunde la situación de institucionalización con la fase final del proceso de enseñanza: cuando el maestro da su clase. En realidad, la institucionalización es un proceso que se desarrolla a lo largo de la enseñanza, a través de las institucionalizaciones parciales que el maestro realiza a medida que los alumnos avanzan en sus conocimientos. En este sentido, devolución e institucionalización son dos procesos complementarios a través de los cuales el maestro intenta controlar la adquisición por parte de los alumnos de las nociones matemáticas cargadas de sentido: la devolución está destinada a que ellos se comprometan de manera autónoma en la resolución de problemas y su validación, y la institucionalización, a que los alumnos sepan que el saber que pusieron en juego es eso a lo que se apuntaba y que habrá que retener (Perrin-Glorian, 1993).

3.3. ¿Cuándo introducir los problemas?

Es conveniente comenzar a trabajar con problemas muy tempranamente, antes de que los alumnos dispongan de las soluciones "expertas" para resolverlos. Las investigaciones de Carpenter, Hiebert y Moser (1981) demuestran que antes de cualquier aprendizaje escolar, los chicos pequeños pueden resolver problemas a su modo, como se verá más adelante.

Si proponemos que los problemas sean el eje a través del cual los alumnos trabajen en matemática desde el primer día de clase del jardín de infantes, asumimos que esos alumnos cuentan con un bagaje de conocimientos necesarios como para poder iniciar el aprendizaje de los contenidos de enseñanza escolar.

3.4. Acerca de los conocimientos de los niños

Numerosas investigaciones a nivel mundial (Fuson y Hall, 1983; Fuson, Richard y Briars, 1982) han puesto de manifiesto que los niños construyen

ideas acerca de los números y del sistema de numeración aún antes de haber concurrido a la escuela. Fayol (1985) y Schaeffer, Eggleston y Scott (1974) coinciden con otros investigadores en que el conteo precede a la conservación. Del mismo modo, a través de diversas investigaciones Gelman y sus colaboradores (Gelman, 1977, 1983; Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983) consideran que la apropiación del número está ligada al conteo y no a la noción de conservación.

De acuerdo con estas investigaciones, el interés por los números, el establecimiento de algunas relaciones, así como el uso de ellos en diferentes contextos de utilización, parece no estar determinado por la existencia previa de la conservación de las cantidades. Veamos algunos de los conocimientos que poseen y sus características.

El recitado de la serie

Los chicos del Nivel Inicial poseen conocimientos sobre la serie numérica oral. Estos conocimientos no son los mismos para todos los alumnos de una misma sala. Difieren no sólo en la extensión del intervalo numérico conocido por ellos, sino también en las distintas competencias de las que disponen y que están implicadas en el recitado convencional.

No reviste la misma complejidad para un alumno recitar la serie a partir del 1 y detenerse cuando ya no sabe más; recitar y detenerse en el número que se le ha solicitado; recitar intercalando palabras (por ejemplo: un elefante, dos elefantes...); recitar a partir de un número diferente de 1 (5, 6, 7...); recitar de manera ascendente de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10; recitar de manera descendente de 1 en 1, de 2 en 2, etcétera (Parra y Saiz, 1992).

La complejidad creciente de esta serie de competencias podrá ser superada en la medida en que éstas aparezcan como herramientas para resolver problemas. Por ejemplo, ya nos preguntamos por qué razón un alumno va a descubrir la conveniencia de recitar a partir de un número diferente de 1 si los cálculos que se le ofrecen son del tipo " $2 + 3$ ", " $3 + 4$ ": usar los dedos o hacer "palitos" para representar esas cantidades no ofrece dificultad, y en consecuencia no necesitará poner en juego el sobreconteo. En este caso, una variable didáctica para que la situación le demuestre al sujeto la insuficiencia de su conocimiento sería introducir números más grandes.

Al recitar la serie, muchos chicos nos demuestran que han descubierto parte de la regularidad y organización que el sistema tiene. Por ejemplo, cuando dicen "uno, dos, tres..., ocho, nueve, diez, diez y uno, diez y dos, diez y tres", etcétera: no saben aún los nombres de los números 11, 12, 13, pero los nombran a su manera y sin saltar ninguno. O bien, cuando llegan a 19 se detienen y si alguien les dice "veinte", "arrancan" nuevamente a gran velocidad: 21, 22, 23,... 29 y se detienen otra vez para volver a empezar si se les dice "treinta". No saben aún la denominación de algunas decenas, pero sí saben que después de los nudos de las decenas (20, 30, 40) los números siguientes se obtienen agregando consecutivamente los números del 1 al 9.

El conteo

Saber recitar la serie no es lo mismo que saber contar elementos de una colección. Es decir, un sujeto que puede recitar la serie hasta un determinado número no necesariamente podrá utilizar ese conocimiento a la hora de contar objetos o dibujos.

Para poder contar se requiere disponer, en primer lugar, del *principio de adecuación única* (Gelman, 1983), esto es, asignar a cada uno de los objetos una y sólo una palabra-número, respetando al mismo tiempo el orden convencional de la serie. Muchas veces observamos en el jardín de infantes que "la mano va más rápido que la boca" (o a la inversa), es decir, no pueden establecer una correspondencia término a término entre cada objeto y una palabra-número y, por lo tanto, el resultado del conteo es errado. Sin embargo, muchos chicos que pueden establecer esa correspondencia, al finalizar el conteo parecen desconocer cuántos objetos hay en total. Al preguntarle "¿Cuántos lápices hay?", Joaquín (5 años), que había contado los siete lápices desplazando uno a uno a medida que recitaba la serie, con gesto sorprendido dijo: "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7". Esto quiere decir que Joaquín aún no puede reconocer que el último número enunciado durante el conteo corresponde a la cantidad total de objetos (*principio de cardinalidad*), y cree que la pregunta "¿Cuántos hay?" se responde repitiendo el recitado completo utilizado para contar.

Otras de las condiciones descriptas por Gelman para lograr el conteo es el *principio de indiferencia del orden*, es decir, comprender que el orden en el que se cuenten las unidades (de derecha a izquierda, de izquierda a derecha, de arriba abajo, etcétera) no altera la cantidad.

Estos principios permiten retomar la reflexión sobre los postulados de Piaget acerca de la construcción del número. Cuando Piaget planteó que el número era la síntesis entre las relaciones de inclusión jerárquica y de orden, no se referiría a la inclusión de aspectos cualitativos —vacas, perros, caballos— en clases abarcativas, sino a la capacidad del niño cuando "incluye mentalmente 'uno' en 'dos', 'dos' en 'tres', 'tres' en 'cuatro', etcétera" (Kamii, 1984).

Con respecto a la relación de orden, no se trataría del establecimiento de un orden empírico (es la varilla más chica, la que le sigue, etcétera), sino de la necesidad de establecer un orden lógico entre los elementos que garantice que no se va a contar dos veces el mismo o se va a dejar alguno sin contar.

Cuando los alumnos realizan el conteo, es importante observar si disponen efectivamente de este orden lógico. De hecho, muchas veces el maestro no advierte que el alumno ha cometido un error de salteo de uno de los elementos y al mismo tiempo ha contado dos veces otro, de modo que se cancelan mutuamente dando la impresión equivocada de que el niño contó con precisión.

Desde el punto de vista didáctico, un alumno que no disponga de los tres principios descriptos ¿no estaría capacitado para resolver problemas que impliquen el conteo y, por lo tanto, no habría que presentárselos? ¿Cómo podría aprender a contar si no le ofrecemos un medio de problemas que lo muestren como necesario? Es justamente a través de la resolución de problemas como un alumno podrá apropiarse de manera progresiva del principio de adecuación única y, de ahí en más, avanzar hacia la posibilidad de cardinalizar una cantidad.

Por otra parte, si ya dispusiera de los tres principios involucrados, ¿cuál sería el sentido de proponerle situaciones en las que el conteo uno en uno de los elementos fuera un procedimiento funcional? ¿No sería el momento de introducir variables didácticas en las situaciones para que el conteo uno en uno apareciera como muy costoso y así generar el avance en sus conocimientos? En el apartado de ejemplos de problemas para abordar estos contenidos se desarrollan propuestas más precisas.

En la enseñanza tradicional, el maestro fuerza el abandono del "contarlo todo" (de uno en uno) y enseña a "seguir contando" (sobreconteo). Esto es coherente con la creencia de que la adición es sólo una "técnica". Desde esa convicción, el contar aparece como un contenido a ser enseñado por el docente, sin hacerlo funcionar como herramienta para resolver problemas.

La realidad es que para muchos chicos que reproducen la indicación del maestro de "poner un número en la cabeza y seguir contando", la estrategia no les resulta efectiva. Un error muy frecuente es, por ejemplo, que $8 + 5$ sea igual a 12. En este caso, comienzan a contar a partir del 8 y dicen: 8, 9, 10, 11, 12, mientras van extendiendo sucesivamente los cinco dedos, es decir que el primer conjunto o totalidad (8), queda "fundido" en el segundo (5) y pierde así, en su pensamiento, su calidad de entidad independiente (Fuson, 1982).

Podemos pensar, en principio, dos razones por las cuales los chicos necesitan durante un tiempo contarlos todo (tomar ocho objetos o hacer ocho marcas en el papel, luego cinco más y a continuación contarlos todos, de uno en uno). En primer lugar, poder contar a partir de un número diferente de 1 requiere de un conocimiento del recitado de la serie numérica mucho mayor. En segundo lugar, si aún no puede controlar las relaciones parte/todo características de la suma, es decir, no puede establecer aún una relación entre dos conjuntos que pasan de ser "todos" a ser partes de un nuevo todo, convierte entonces mentalmente todos los elementos en "unos"; dicho de otro modo, convierte $8 + 5$ en $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (Kamii, 1984).

Si se acepta que los conocimientos se producen por adaptación a un medio que genera desequilibrios, será a través del planteo de múltiples situaciones con las que deba enfrentarse un alumno y del pedido de las explicaciones, argumentaciones y validaciones consecuentes como irán desapareciendo paulatinamente tantos dedos, montones de fichas y hojas llenas de palitos.

La numeración escrita

La investigación llevada a cabo en la Argentina por Delia Lerner y Patricia Sadosky (1994), acerca de cómo se aproximan los chicos al conocimiento del sistema de numeración, arrojó dos certezas.

a) Los chicos construyen muy tempranamente hipótesis, ideas particulares para producir e interpretar representaciones numéricas.

Con argumentos similares a los que describen las investigadoras en los casos por ellas analizados, Mercedes (5 años y 2 meses), al tener que comparar y decidir cuál de los siguientes números es más grande: 367 y 57, dice "éste (señalando al 367) porque tiene más números". A pesar de que

Mercedes no puede aún leer esos números "sabe" que a mayor cantidad de cifras mayor el número.

Frente al pedido de comparación de dos números de igual cantidad de cifras, 34 y 78, Julián (5 años y 8 meses) argumenta "es más grande éste (señalando el 78) porque el 7 es más grande que el 3 y el primero es el que manda". A pesar de no saber leerlos, puede argumentar poniendo en juego su hipótesis acerca de que los números "valen" diferente si están en lugares diferentes. Ese argumento está ligado a la numeración escrita: Julián sabe que el primer número corresponde a los "veinti", "treinti", "setenti", etcétera, y que, por lo tanto, son mayores que los "dos", "tres", "siete", etcétera. En otros casos, las argumentaciones que ofrecen están más ligadas a la serie numérica oral: Sebastián (5 años y 9 meses), por ejemplo, explica que "el 41 es más grande que el 14 porque si contás, decís 1, 2, 3, ..., 14, 15, ..., 19, 20, y tenés que seguir contando un montón hasta llegar al 41. Está después y por eso es más grande".

Las investigadoras describen que cuando en los números a comparar la primera cifra es la misma (21 y 23), muchos chicos argumentan que "entonces hay que mirar el segundo número".

¿De dónde obtienen estas ideas? Por supuesto que no es del conocimiento de las agrupaciones recursivas, decenas, centenas, etcétera, del sistema de numeración, sino de la interacción con un medio repleto de portadores numéricos con el que interactúan.

Pero si en el jardín de infantes y en los inicios de primer año sólo trabajan con los números del 1 al 9, ¿cómo pueden hacer uso de lo que saben? ¿Cómo construyen y explicitan que "si tiene más números entonces es más grande" si no pueden comparar números de diferente cantidad de cifras? ¿Cómo vinculan su conocimiento de la numeración hablada con la escrita para argumentar (a su manera) que el valor de un número depende de la posición que ocupe, si comparan siempre números de una cifra?

b) Los chicos no construyen la escritura convencional de los números tal cual el orden de la serie numérica.

Es decir, no aprenden primero el 1 y después el 2, 3, ..., 9, 10, 11, ..., 19, 20, 21, etcétera. Hay ciertos números que son privilegiados y éstos son los nudos, es decir, las decenas enteras, las centenas enteras, etcétera. Primero pueden escribir 20, 30, 100, 200, y posteriormente acceden a la escritura convencional de los intervalos entre esos nudos.

Los niños construyen ideas acerca de la escritura de los números basándose entonces en dos informaciones: la que extraen de la numeración hablada y la que les da el conocimiento de la escritura convencional de los nudos.

Para escribir números de los que aún no conocen su representación convencional, hacen uso de esos saberes yuxtaponiendo los símbolos que conocen según el orden que les indica la numeración hablada. Por ejemplo, al pedirle a Lucía (5 años y 10 meses) que escriba diecisiete, escribe 107; veinticuatro lo escribe 204; trescientos noventa y seis como 300906; dos mil trescientos como 2000300 (otros chicos lo escriben como 21000300). Esta correspondencia estricta con la numeración hablada, es decir, la convicción de que los números se escriben tal cual se los nombra, deriva de las características mismas que el sistema de numeración hablada posee. A diferencia de la numeración escrita, que es posicional, la numeración hablada no lo es. Si lo fuera, al leer un número, por ejemplo el 7452, diríamos "siete cuatro cinco dos". Sin embargo, leemos en función del conocimiento que poseemos, "siete mil cuatrocientos cincuenta y dos", es decir que al mismo tiempo que enunciamos la cifra, enunciamos la potencia de 10 que le corresponde a cada una.

¿Cómo avanzan los chicos hacia la escritura convencional? Las investigadoras encontraron que este avance se produce al entrar en conflicto dos de las hipótesis fuertes de las que disponen: por un lado, el convencimiento de que los números se escriben tal cual se dicen; por otro, el conocimiento de que un número es mayor que otro si tiene más cifras.

Un alumno que sabe escribir los nudos de manera convencional, por ejemplo el 20, el 30, etcétera, puede escribir el veintitrés como 203 y argumentar con mucha convicción que lleva más números que el 20 porque es más grande. Si a continuación se le pidiera que escribiera el 30, y se le preguntara si un número que es menor puede escribirse con más cifras que otro mayor, comenzaría a replantearse sus ideas previas. Esto no significa que inmediatamente acceda a la escritura convencional en cualquier intervalo de la serie numérica, pero lo que sí es seguro es que se quedará pensando acerca de que la escritura de los números tiene ciertas particularidades.

Si se le ofrecen diversas situaciones en las que pueda comparar números de diferente cantidad de cifras, progresivamente irá construyendo ideas acerca de que los "diecís", "veintís", "treintís", etcétera, "van con dos nú-

meros", "los cientos van con tres", "los miles van con cuatro". Estos conocimientos funcionan como control de escrituras ligadas a la numeración hablada: "son muchos números", se les escucha decir, y se embarcan en reiterados intentos de modificar la escritura hasta lograr reducir la cantidad de cifras (Lerner y Sadovsky, 1994).

4. LOS PROBLEMAS Y LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO

Dijimos que aprender matemática —desde esta perspectiva— es construir el sentido de los conocimientos, y que son los problemas y la reflexión en torno a éstos lo que permite que esos conocimientos se carguen de sentido al aparecer como herramientas para poder resolverlos.

4.1. Qué clase de problemas trabajar

Se trata de proponer a los alumnos situaciones didácticas en las que los números aparezcan como herramientas de resolución, es decir, que sea necesario usar los números en todos los contextos posibles. ¿Cuáles son esos contextos de utilización? ¿Para qué sirven los números? ¿Cómo y cuándo se usan? Parra y Saiz (1992) lo explican.

- *Como memoria de la cantidad.* Los números dan la posibilidad de recordar una cantidad aunque ésta no esté presente. Por ejemplo, si se le pide a un alumno que busque en un armario la cantidad de tijeras necesarias para que cada uno de los integrantes de su mesa tenga una, podrá realizar diferentes procedimientos. Llevar en tantos viajes como sea necesario una tijera por vez hasta completar el reparto; tomar un montón de tijeras al azar sin anticipar si van a ser suficientes o van a sobrar; o contar cuántos chicos hay en su mesa incluyéndose a sí mismo, retener el último número enunciado, dirigirse al armario y realizar el conteo de las tijeras necesarias. En este último caso, se ha puesto en juego el aspecto cardinal del número, el número como memoria de la cantidad.
- *Como memoria de la posición.* Los números también permiten recordar la posición de un elemento dentro de una serie ordenada sin necesidad de repetir toda la serie. Por ejemplo, si los percheros de la sala están

numerados, el niño que tenga el perchero con el número 7 no necesita buscar desde el 1, sino que puede dirigirse directamente al número que designa la posición en la que colgará su mochila. Si los libros de la biblioteca de la sala están numerados, un fichero que indique el título que le corresponde a cada número facilitará la búsqueda del libro deseado y el orden posterior. En los dos casos aparecerá el número en su aspecto ordinal.

- *Como códigos.* Que el colectivo "21" se llame veintiuno no significa que entren 21 pasajeros, ni que el boleto cueste \$ 21, ni que recorra 21 km, ni tampoco que haya sido la vigésimo primera en el orden de inscripción de las líneas de colectivos. No expresa, por lo tanto, ni el aspecto cardinal ni el ordinal. Solamente es un código que permite diferenciar esa línea de otras que realizan diferentes recorridos. De igual modo, los números de teléfono también son códigos, no dan cuenta de ninguna cantidad ni tampoco de ningún orden: no existe el número telefónico "00000001", luego el "00000002", y así sucesivamente.
- *Para expresar magnitudes.* Los números aparecen a veces asociados a diferentes magnitudes: tiene 5 años, pesa 32 kg, mide 1,40 m, entra al jardín a las 9 hs., etcétera.
- *Para anticipar resultados.* Los números permiten también calcular resultados aunque esas cantidades no estén presentes, no sean visibles e, incluso, cuando la acción transformadora de las cantidades expresadas en el problema no se pueda realizar directamente sobre los objetos.

4.2. *Cómo elegir los problemas e interpretar las producciones de los alumnos*

Utilicemos el siguiente problema para ver qué tipo de resoluciones pueden aparecer por parte de los chicos, como también qué criterios didácticos debería tomar en cuenta el maestro.

PROBLEMA "EL TESORO" (Charnay y Valentin, 1992)

- *Objetivos del maestro:* favorecer la anticipación de resultados; desarrollar estrategias que faciliten la resolución de cálculos aditivos.
- *Organización de la clase:* se juega en pequeños grupos de 3 o 4 alumnos.
- *Materiales:* una bolsa opaca o caja con tapa con tres "piedras preciosas"

adentro (porotos o cualquier otro material) para cada alumno, porotos sobre la mesa, un dado, lápiz y papel para cada uno.

- *Consigna:* "Cada uno de ustedes tiene dentro de la caja 3 piedras preciosas que yo ya puse. Por turno tiran el dado y averiguan cuánto van a tener ahora en su tesoro, agregando tantas piedras como diga el dado. Después hagan lo que consideren necesario con el lápiz y el papel para poder recordar cuántas tienen ahora en su tesoro. Al final tienen que decidir quién ganó".

El juego supone que los chicos que ya han recibido los 3 porotos tienen que anticipar cuántos tendrán después de haber ganado tantos como puntos hay en el dado que acaban de tirar. Los porotos ya recibidos no son visibles, el alumno sabe solamente cuántos hay ya en su caja.

Procedimientos posibles

- Algunos niños sólo podrán encontrar el nuevo valor de su tesoro sacando los 3 porotos de la caja, agregando tantos como puntos hayan salido en el dado y contándolos todos uno a uno. Estos niños no han comprendido aún que pueden anticipar la respuesta o no saben cómo hacerlo.
- Otros harán tantas marcas en el papel como porotos tienen o usarán los dedos para luego contarlos uno a uno.
- Algunos (si el número que salió en el dado es bajo) hacen una representación mental de la situación. Es decir, "ven" los porotos "en sus cabezas" y los cuentan uno a uno sin manipular el material ni hacer ninguna representación gráfica.
- Otros podrán hacer sobreconteo, es decir, retendrán el 3 y seguirán contando, apoyándose en los dedos o tocando los puntos del dado (3, 4, 5, 6, 7).
- Por último, algunos alumnos —dependiendo de la cantidad que salga en el dado— podrán hacer uso de resultados memorizados (por ejemplo, $3 + 3 = 6$) o realizar transformaciones sobre los números para obtener el resultado. Por ejemplo, $3 + 2$ pueden pensarlo como "dos más dos es cuatro y uno más del tres es cinco".

Todos estos alumnos habrán resuelto el problema, aunque los procedimientos difieran entre el conteo —en los primeros cuatro casos— y el cálculo en el último caso.

Como se ve, es una propuesta viable plantear problemas aun cuando los alumnos no dispongan de los procedimientos de cálculo. Es justamente la posibilidad de resolver problemas más complejos lo que le va a permitir a un sujeto construir con significado nuevos modos de resolución al descubrir lo costoso que resulta el conteo y al comparar sus producciones con otras más eficientes.

Conocimientos previos necesarios

¿Qué necesita saber un docente acerca de los conocimientos de sus alumnos para decidir si este problema es válido para ellos?

Como vimos, el conocimiento mínimo necesario es disponer del conteo de las cantidades involucradas (en este caso, hasta 9). Con esto un alumno ya está en condiciones de resolverlo. Si el maestro sabe que sus alumnos cuentan más allá de esa cantidad, podrá poner en la caja una cantidad mayor de porotos para que puedan hacer uso de lo que saben.

Variables didácticas que favorecen el avance en los procedimientos

Las variables didácticas de una situación son aquellos aspectos cuya modificación exige cambios en las estrategias de resolución de los alumnos y en su relación con los saberes puestos en juego.

Si en lugar de utilizar un dado con configuraciones espaciales fijas (puntos), tienen que jugar con un dado en cuyas caras están los números del 1 al 6, se fuerza el reconocimiento de las cifras y se obstaculiza el conteo uno en uno. Si bien algunos niños necesitarán seguir contándolo todo y para eso utilizarán los dedos o harán marcas en el papel para representar la cantidad que expresa el número del dado, otros alumnos, al no tener facilitado el conteo uno en uno por la ausencia de los puntos, recurrirán a otros procedimientos.

El pedido de explicitación de los nuevos recursos puestos en juego, que pueden variar entre el sobreconteo y estrategias de cálculo mental para encontrar los resultados, permitirá el avance progresivo de los conocimientos. En este sentido, las intervenciones del maestro deberían centrarse en alentar a los alumnos a utilizar lo que saben para descubrir lo que no saben, es decir, a encontrar estrategias para transformar en fáciles los cálculos que les resultan difíciles. Por ejemplo, si en la caja se pusieron 5 porotos y al

tirar el dado alguien obtiene el número 6, puede pensar ese cálculo como $5 + 5 + 1$ (Parra y Saiz, 1992).

El pasaje del conteo al cálculo no se dará simultáneamente en todos los niños, e incluso la posibilidad de resolver a través del cálculo mental en un mismo niño está determinada por la magnitud de las cifras con las que esté operando. Un alumno que "sabe" que $5 + 5 = 10$ puede necesitar recurrir al conteo si el problema involucra cifras como 7 y 8.

Tipos de representaciones posibles

El pedido de representación de las cantidades con lápiz y papel que formula el problema tiene, por una parte, la intencionalidad de mostrar su funcionalidad, al permitir recordar una cantidad que no está presente. Por otra parte, tiene también el sentido de propiciar el progresivo avance en el dominio de la expresión simbólica, acerca de la cual los niños tienen ideas previas.

La investigación de Martin Hughes (1987) mostró que, al pedir a los niños pequeños que hicieran sobre el papel lo necesario para poder recordar cuántos elementos había sobre la mesa, podían aparecer cuatro posibles representaciones:

- *Idiosincrásicas.* Estas producciones no dan cuenta ni de la cantidad ni de la cualidad de los objetos. Es decir que no informan qué ni cuántos hay. En este momento, los chicos sólo cubren la hoja con "garabatos".
- *Pictográficas.* La mayoría de los niños de 3 años ya disponen de este nivel de representación. Dan cuenta de la cantidad exacta dibujando lo más fielmente posible cada uno de los objetos involucrados en la situación. En el caso del problema planteado, hacen círculos para representar los porotos. Si lo que hay que expresar es cantidad de flores, dibujarán flores. Aun en los casos en los que no tienen la posibilidad de determinar el cardinal de la colección, pueden representar la cantidad exacta, estableciendo una correspondencia término a término entre cada objeto y su dibujo.
- *Iconicas.* Estas representaciones dan cuenta de la cantidad exacta de objetos pero a través de marcas que no brindan ninguna información acerca de su cualidad. Dibujan en general "palitos", tantos como objetos hay. Poder utilizar esas marcas independientemente de si lo que re-

presentan son porotos, chicos, flores, o cualquier otra cosa, supone un salto conceptual muy grande. Es el indicio de que ese sujeto ha comenzado a comprender que la expresión matemática requiere centrarse en las propiedades cuantitativas dejando de lado las propiedades cualitativas (al número 10, por ejemplo, no lo escribimos de una manera si da cuenta de una cantidad de porotos, de otra si da cuenta de una cantidad de flores, etcétera).

- *Simbólicas.* Utilizan símbolos convencionales para representar las cantidades. Si bien utilizan más comúnmente las cifras, también es posible encontrar producciones en donde hayan escrito el nombre de los números. Antes de poder comprender que una sola cifra puede expresar una cantidad de objetos, suelen escribir tantas cifras como cantidad de objetos tienen para representar, es decir que realizan nuevamente una correspondencia término a término. Por ejemplo: Sebastián (5 años y 9 meses) escribe 12345 para representar los 5 porotos que tiene en su tesoro. Sinclair, Tièche-Christinat y Garin (1994) encontraron en sus investigaciones que muchos chicos realizaban también una correspondencia término a término pero repitiendo la misma cifra. En este caso la escritura sería: 55555.

¿Cómo hacer para que evolucionen estas formas de representación? Nuevamente planteamos la necesidad de que sea la situación la que le demuestre al sujeto la no conveniencia o pertinencia del recurso elegido. ¿Por qué un alumno va a sentir la necesidad de avanzar hacia una representación más evolucionada si las cantidades involucradas en el problema permiten dibujar sin demasiado costo? ¿Cómo haría un alumno para acceder a la representación simbólica si en la sala no hay portadores numéricos en los que apoyarse para descubrir cómo se escriben los números? ¿Cómo podría apropiarse de las estrategias más evolucionadas de sus compañeros si el saber no circula, si no hay confrontación e intercambio?

4.3. Los problemas y la representación convencional

Que los alumnos puedan utilizar la escritura de cifras para comunicar cantidades no significa que al mismo tiempo puedan expresar las transfor-

maciones realizadas a través de los signos convencionales. Por ejemplo, alguien puede escribir "7" para dar cuenta de cuántas piedras tiene en su tesoro, lo que no es lo mismo que —para expresar que ya tenía 3 porotos en su caja y que sacó 4 al tirar el dado— escriba $3 + 4 = 7$.

El signo "+" no se aprende por asociación con la acción observable de unir dos conjuntos, ni con la explicación verbal de que esta acción significa "ponerlos juntos", sino a través de las relaciones mentales —y por lo tanto propias— que haya realizado con los números (Kamii, 1984).

Poder comprender el significado de la escritura " $3 + 4 = 7$ " requiere, entre otras cosas (que por razones de espacio no podré desarrollar aquí), reconocer las relaciones de jerarquía entre las cifras 3, 4 y 7 que están determinadas por los signos "+" e "=". Estas relaciones, que pueden parecernos obvias, no lo son en absoluto para muchos niños de jardín de infantes. De hecho, frente al cálculo " $3 + 2 = 5$ ", si se les pide que le den a un compañero la misma cantidad de caramelos que indica ese cálculo, muchas veces descubriremos que le dan 10 (Kamii, 1984). En ese caso, lo que hacen es una yuxtaposición de cantidades sin tener en cuenta las relaciones de jerarquía que determinan los signos, es decir, interpretan la ecuación como tres cantidades yuxtapuestas al mismo nivel.

En el enfoque clásico de enseñanza esto no se tiene en cuenta. Cuando un niño ingresa a la escuela, se enfrenta con el aprendizaje de procedimientos formales para expresar acciones que antes realizaba de manera espontánea y no institucionalizada. Antes agregaba, reunía, quitaba, repartía, separaba los objetos que estaban a su alcance y que manipulaba en función de sus intereses o necesidades; ahora, esas acciones son sustituidas por el lápiz y el papel, con los que debe realizar las cuentas que le indica el maestro (Moreno y Sastre, 1986).

Al priorizar de esta manera la enseñanza de los aspectos sintácticos, la escuela imparte la enseñanza de la aritmética en contextos en los que la diferenciación entre las propiedades cualitativas y cuantitativas ya está hecha. Se espera del alumno que realice las cuentas en el cuaderno tal y como se las enseñaron y sin estar vinculadas a ninguna situación que les dé sentido.

El niño realiza así el aprendizaje de la aritmética totalmente centrado en un universo cuantitativo de simbolizaciones aritméticas universales. Lo que aprende no le resulta válido para organizar y resolver cuantitativamente los problemas que le surgen en su vida extraescolar, que además de las propiedades aritmetizables tienen características cualitativas.

presentan son porotos, chicos, flores, o cualquier otra cosa, supone un salto conceptual muy grande. Es el indicio de que ese sujeto ha comenzado a comprender que la expresión matemática requiere centrarse en las propiedades cuantitativas dejando de lado las propiedades cualitativas (al número 10, por ejemplo, no lo escribimos de una manera si da cuenta de una cantidad de porotos, de otra si da cuenta de una cantidad de flores, etcétera).

- *Simbólicas.* Utilizan símbolos convencionales para representar las cantidades. Si bien utilizan más comúnmente las cifras, también es posible encontrar producciones en donde hayan escrito el nombre de los números. Antes de poder comprender que una sola cifra puede expresar una cantidad de objetos, suelen escribir tantas cifras como cantidad de objetos tienen para representar, es decir que realizan nuevamente una correspondencia término a término. Por ejemplo: Sebastián (5 años y 9 meses) escribe 12345 para representar los 5 porotos que tiene en su tesoro. Sinclair, Tièche-Christinat y Garin (1994) encontraron en sus investigaciones que muchos chicos realizaban también una correspondencia término a término pero repitiendo la misma cifra. En este caso la escritura sería: 55555.

¿Cómo hacer para que evolucionen estas formas de representación? Nuevamente planteamos la necesidad de que sea la situación la que le demuestre al sujeto la no conveniencia o pertinencia del recurso elegido. ¿Por qué un alumno va a sentir la necesidad de avanzar hacia una representación más evolucionada si las cantidades involucradas en el problema permiten dibujar sin demasiado costo? ¿Cómo haría un alumno para acceder a la representación simbólica si en la sala no hay portadores numéricos en los que apoyarse para descubrir cómo se escriben los números? ¿Cómo podría apropiarse de las estrategias más evolucionadas de sus compañeros si el saber no circula, si no hay confrontación e intercambio?

4.3. Los problemas y la representación convencional

Que los alumnos puedan utilizar la escritura de cifras para comunicar cantidades no significa que al mismo tiempo puedan expresar las transfor-

maciones realizadas a través de los signos convencionales. Por ejemplo, alguien puede escribir "7" para dar cuenta de cuántas piedras tiene en su tesoro, lo que no es lo mismo que —para expresar que ya tenía 3 porotos en su caja y que sacó 4 al tirar el dado— escriba $3 + 4 = 7$.

El signo "+" no se aprende por asociación con la acción observable de unir dos conjuntos, ni con la explicación verbal de que esta acción significa "ponerlos juntos", sino a través de las relaciones mentales —y por lo tanto propias— que haya realizado con los números (Kamii, 1984).

Poder comprender el significado de la escritura " $3 + 4 = 7$ " requiere, entre otras cosas (que por razones de espacio no podré desarrollar aquí), reconocer las relaciones de jerarquía entre las cifras 3, 4 y 7 que están determinadas por los signos "+" e "=". Estas relaciones, que pueden parecernos obvias, no lo son en absoluto para muchos niños de jardín de infantes. De hecho, frente al cálculo " $3 + 2 = 5$ ", si se les pide que le den a un compañero la misma cantidad de caramelos que indica ese cálculo, muchas veces descubriremos que le dan 10 (Kamii, 1984). En ese caso, lo que hacen es una yuxtaposición de cantidades sin tener en cuenta las relaciones de jerarquía que determinan los signos, es decir, interpretan la ecuación como tres cantidades yuxtapuestas al mismo nivel.

En el enfoque clásico de enseñanza esto no se tiene en cuenta. Cuando un niño ingresa a la escuela, se enfrenta con el aprendizaje de procedimientos formales para expresar acciones que antes realizaba de manera espontánea y no institucionalizada. Antes agregaba, reunía, quitaba, repartía, separaba los objetos que estaban a su alcance y que manipulaba en función de sus intereses o necesidades; ahora, esas acciones son sustituidas por el lápiz y el papel, con los que debe realizar las cuentas que le indica el maestro (Moreno y Sastre, 1986).

Al priorizar de esta manera la enseñanza de los aspectos sintácticos, la escuela imparte la enseñanza de la aritmética en contextos en los que la diferenciación entre las propiedades cualitativas y cuantitativas ya está hecha. Se espera del alumno que realice las cuentas en el cuaderno tal y como se las enseñaron y sin estar vinculadas a ninguna situación que les dé sentido.

El niño realiza así el aprendizaje de la aritmética totalmente centrado en un universo cuantitativo de simbolizaciones aritméticas universales. Lo que aprende no le resulta válido para organizar y resolver cuantitativamente los problemas que le surgen en su vida extraescolar, que además de las propiedades aritmetizables tienen características cualitativas.

En la escuela son el maestro y el libro quienes abstraen y aíslan propiedades cuantitativas y cualitativas; en la vida es el niño el que debe abstraer, analizar y organizar toda la información para poder decidir cómo va a proceder (Moreno y Sastre, 1986). De este modo, en primer lugar, la fractura entre los conocimientos que un niño tiene y la matemática escolar se hace más profunda y, en segundo lugar, el alumno no puede construir con sentido su conocimiento porque se ha instalado un divorcio entre el método y el concepto.

Si la secuencia de enseñanza de la suma en primer año de la EGB, por ejemplo, es que primero aprenda a hacer la cuenta, la practique repetidas veces para luego, una vez dominado el procedimiento, la aplique en la resolución de problemas, ¿cómo hace ese alumno para descubrir que esa operación no tiene restricción alguna en cuanto a lo cuantitativo pero sí las tiene en lo cualitativo? Si no hay un problema, los números que suma y el resultado que obtiene son sólo eso, números, y por lo tanto no puede apropiarse de que se puede, por ejemplo, sumar una cantidad de caramelos más otra cantidad de caramelos y se obtiene como resultado la cantidad total de caramelos; que también se puede sumar una cantidad de caramelos más una cantidad de chupetines y se obtiene una cantidad que expresa golosinas; pero que si se sumaran una cantidad de caramelos más una cantidad de dinero, el resultado ¿representaría "caradine", "dinecara"?

El hacer una cuenta sin preguntarse ni cuestionarse qué significado tiene el resultado, está inducido por una enseñanza que no contempla la necesidad de los problemas como medio para que los alumnos aprendan matemática. De este modo se dificulta la construcción del sentido semántico constitutivo del saber matemático a través del cual poder decidir en qué casos puede utilizar la suma y en qué casos no. La secuencia entonces debería ser, primero, proponer los problemas para que los alumnos aprendan a sumar utilizando los procedimientos de los que disponen; luego, la enseñanza del recurso "oficial" de la matemática: la cuenta.

Por otra parte, la experiencia demuestra que si la enseñanza no se ha organizado a través de la resolución de problemas y de la reflexión en torno a ellos, cuando un niño tiene que comunicar una transformación aditiva se encuentra con dificultades. Él ha resuelto cuentas en su cuaderno siguiendo instrucciones precisas de cómo hacerlo; cuando aparece un problema y tiene que explicar a sus compañeros cómo lo resolvió, no recibe indicaciones externas que le resuelvan la tarea.

Comunicar una transformación requiere seleccionar, entre sus conocimientos, los que le resulten más idóneos para ser comprendidos por sus pares en el intercambio de información. En esta búsqueda, los sistemas simbólicos más elegidos no son muchas veces los que la escuela le ofrece, sino los que él mismo ha ido construyendo en sus actividades espontáneas y no espontáneas como producto de su interrelación con el medio que lo rodea.

Utilizar la escritura de signos aritméticos supone partir de una representación mental de la situación, en la que lo cuantitativo está correctamente diferenciado de lo cualitativo. Antes de lograr dicha diferenciación y poder darle a cada una de esas propiedades el tratamiento gráfico más adecuado, los niños pasan por fases intermedias. Las investigaciones de Moreno y Sastre (1986) sobre esta materia dan cuenta de que el proceso constructivo por el cual los alumnos pueden expresar una transformación aditiva determina un orden de aparición de las competencias posibles. Este orden es:

- 1º) lenguaje oral;
- 2º) lenguaje escrito;
- 3º) dibujo;
- 4º) signos matemáticos.

Cuando un alumno resuelve un problema aditivo y se le pide que informe de algún modo a la clase acerca de los procedimientos utilizados, lo primero que podrá hacer es hablar sobre ellos, luego podrá emitir mensajes escritos, posteriormente reconstruirá la secuencia dibujándola y, por último, encontrará en la escritura con signos aritméticos el procedimiento más eficiente.

Si bien el lenguaje oral y el escrito presentan indisociadas las propiedades cualitativas y cuantitativas de la realidad empírica, cada uno de ellos tiene una especificidad propia y los avances del primero no se transfieren de inmediato al segundo. Esto significa que un alumno puede tener éxito en la comunicación oral y fracasar en su escritura.

Hablar o escribir no sólo son dos maneras diferentes de comunicarse con los demás; significan también diferentes formas de representación mental de una misma realidad. Comunicar una transformación a través del dibujo representa una mayor complejidad. Por ejemplo, si el problema planteado fuera "Julián tenía 7 caramelos y se comió 3, ¿cuántos caramelos tiene ahora?", y un alumno dibujara para comunicar la situación, tendría

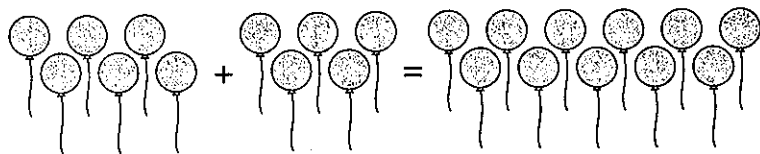
que dibujar a Julián y los 7 caramelos, luego la acción de Julián comiéndolos y por último, los caramelos restantes. La cantidad de información que tiene que controlar y la atención en los aspectos cualitativos—los caramelos tienen que parecer caramelos y no otra cosa, el dibujo tiene que expresar que los come y no otra acción— hacen que no pueda controlar muchas veces los aspectos cuantitativos puestos en juego y no logre una comunicación efectiva (Moreno y Sastre, 1986).

En la observación de diferentes producciones de niños del Nivel Inicial es frecuente encontrar representaciones destinadas a comunicar la resolución de una situación aditiva, que se podrían entender como de transición antes de la utilización de los signos aritméticos. Por ejemplo, muchos niños utilizan cifras, ya sean solas o acompañando el dibujo de los elementos involucrados en el problema. Si bien no utilizan los signos “+” e “=”, suelen darle un diferente tratamiento a la cifra que representa el resultado: o escriben ese número mucho más grande que los otros, o lo redondean, dando muestras claras de que disponen conceptualmente de las relaciones de jerarquías entre los números, aunque no puedan expresarlo a través del lenguaje matemático.

La escritura aritmética es uno de los múltiples sistemas de simbolización con los que un niño puede expresar los conceptos que tiene. Para favorecer su uso con significado, no por imposición, es necesario que el docente conozca y acepte la existencia de los diferentes sistemas simbólicos que le preceden (Moreno y Sastre, 1986).

4.4. El papel de la representación en las situaciones

Muchas veces, bajo el supuesto de que los niños van a aprender el uso de los signos por observación de las acciones que representan, se presentan esquemas de este tipo



Debajo del gráfico modelo aparecen otros similares a los que les falta el resultado, para que los alumnos los completen dibujando la cantidad total de elementos.

En primer lugar, si tenemos 6 globos y luego 5 más, en el mismo acto que los reunimos desaparecen esas totalidades previas para pasar a formar parte de la nueva totalidad, 11 globos. En cambio, en el gráfico aparecen los 6, los 5 y los 11 globos como si fueran cantidades yuxtapuestas al mismo nivel, es decir hay 22 globos. Este tipo de actividades, lejos de favorecer la apropiación de las relaciones parte/todo y de las relaciones de jerarquías entre los números, las dificultan; por otra parte, no se corresponden con lo que los niños hacen para resolver. Ya sea que utilicen material concreto, dibujos de los globos, “palitos” o dedos, representarán los 6 elementos, luego los 5 y los contarán todos, obteniendo 11 elementos que son los mismos que fueron contando de uno en uno.

Eso, justamente, es saber sumar, es decir, comprender que dos totalidades, una vez reunidas, se transforman en partes de una nueva totalidad.

En segundo lugar, ¿qué procedimientos de resolución pueden utilizar? La actividad plantea una restricción en esta materia, ya que obliga a utilizar el conteo de uno en uno de los elementos para averiguar el valor de los sumandos. Es decir que si un alumno dispusiera del sobreconteo, del cálculo memorizado o de estrategias de cálculo, no podría utilizarlos. En ese caso, ¿por qué dar como situación de aprendizaje algo que los alumnos no necesitan aprender porque ya lo saben?

Por otra parte, el tipo de representación que se utiliza es el pictográfico. Como se vio más arriba, la mayoría de los niños de 3 años disponen de esta competencia para expresar cantidades. La situación no permite que los conocimientos que los niños hayan construido en esta materia puedan ser utilizados (palitos, números) y, por supuesto, no genera la necesidad de aprender nuevos modos de representación a quienes aún necesiten dibujar cada uno de los elementos implicados. Además, ¿qué sentido tendría plantear la comunicación de procedimientos? Si se puede resolver de una sola manera y si además la representación de la situación ya está pautaada, ¿qué podrían informar, comparar, discutir los alumnos? ¿Para qué pedir la prueba de la validez de lo hecho si no hay opciones, si todos están restringidos a resolverlo de la misma manera?

Pensemos qué sucedería si en lugar de esa actividad, el maestro planteara el siguiente problema: “Joaquín compró 6 globos verdes y 5 azules.

¿Cuántos globos tiene?”. Cada alumno tendría que buscar entre todo su saber matemático lo que considere más pertinente para la resolución de este problema. Algunos dibujarán los globos (sólo 11); otros harán 11 palitos; otros podrán hacer sobreconteo; alguno lo podrá pensar, por ejemplo, como $5 + 5 + 1$; y habrá otros que dispongan del resultado memorizado. Si el maestro pidiera que hicieran con lápiz y papel lo que consideren necesario para registrar cómo lo resolvieron, aparecerán dibujos, palitos, números, signos... Pedir en este contexto la puesta en común tiene el sentido didáctico de permitir la información y comparación de estrategias diferentes. El saber circula, la situación de aprendizaje está desplegada.

Posteriormente, el maestro podrá ir aumentando las cantidades: ahora hay 18 globos verdes y 9 azules. Será entonces la situación la que les demuestre a los alumnos que dibujan o utilizan dedos o palitos que con ese conocimiento no es suficiente, que es necesario interesarse por lo que brindan otros compañeros al insistir en que es mejor “poner un número en la cabeza y seguir contando” o que es más fácil si lo piensan como $18 + 10 - 1$, etcétera.

Las institucionalizaciones parciales que el maestro vaya introduciendo harán aparecer a los nuevos conocimientos construidos a través de las acciones, explicitaciones, argumentaciones, revisiones y validaciones, con el rango de un saber reutilizable en otros contextos, es decir, como herramientas para resolver diferentes problemas.

5. PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO

Se incluyen a continuación problemas para encarar la enseñanza del número. He seleccionado para tal fin problemas que si bien no constituyen situaciones probadas y controladas⁶ de acuerdo con los métodos propios de la teoría de situaciones, sí pueden, en mi opinión, en contextos de trabajo adecuados, ser incorporados al aula de acuerdo con los criterios provistos por la didáctica de la matemática analizados anteriormente. Mi intención ha sido la de mostrar que para instalar en el aula una enseñanza cargada de

6. Debe tenerse presente esta salvedad al leer las propuestas que presento a continuación, donde utilizo indistintamente las palabras “situación” y “problema”.

sentido no es necesario “tirar por la borda” todo lo hecho previamente en el accionar docente.

A lo largo de los últimos años hemos asistido a una vorágine de “métodos de enseñanza” diferentes, cada uno de ellos presentado como la “mejor” manera de enseñar. Algunas acciones de capacitación han generado la concepción de que para ser un buen docente hay que ser “renovador”, y que esto sólo es posible si se tira por tierra todo lo hecho previamente, sin importar los logros que la propia experiencia haya confirmado, para abrazarse a la panacea ofrecida. Chevallard (1985) ha denominado este proceso como *innovación*. El objeto de la innovación es la “moda” vigente, de ahí la búsqueda incesante de nuevos medios que vengan a resolver los “fracasos” de los anteriores. Así, cada nueva ola de innovación descarta lo construido previamente, sin extraer los aportes útiles de lo ya elaborado.

La didáctica de la matemática no es un nuevo “método” de enseñanza. No se dedica a la producción de medios para actuar sobre la enseñanza, sino a la producción de conocimientos que permitan anticipar y controlar, en la mayor medida posible, los procesos que tienen lugar en el dominio de la enseñanza escolar de la matemática. Estos procesos, como ya vimos, no sólo dependen de los tipos de problemas que se planteen, sino también de la secuenciación de los mismos, de las modificaciones intencionales (variables didácticas) que se realicen con el objetivo de hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos hacia el saber que se intenta transmitir, de las interacciones que se promuevan entre los alumnos y de los tipos de intervención docente durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje de ese saber.

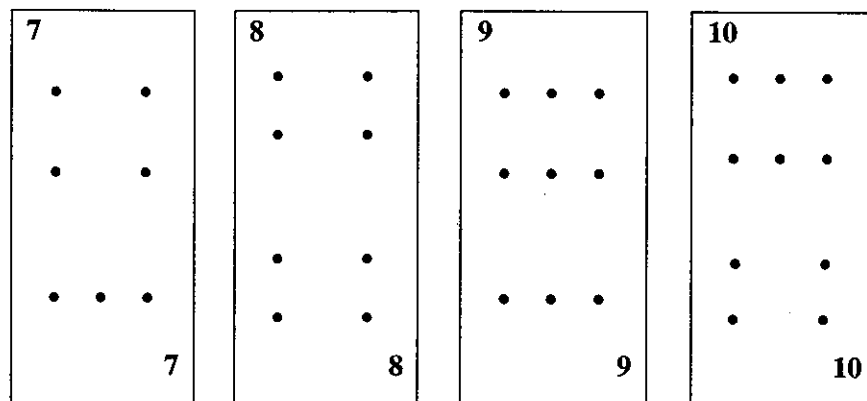
Si los contextos de enseñanza y de aprendizaje responden a este enfoque, los problemas –aun los que en apariencia son más sencillos– pueden ser herramientas útiles para lograr los objetivos propuestos. Se trata, entonces, de que los maestros puedan resignificar su práctica haciendo una revisión de las situaciones que utilizan, para incorporar nuevas, mantener y/o modificar algunas, descartar otras.

5.1. Situaciones en las que los números son utilizados como memoria de la cantidad

Para trabajar esta función del número, son adecuados todos los problemas que impliquen la comparación de cantidades, la determinación del car-

dinal de una colección de objetos, etcétera. El trabajo con configuraciones espaciales fijas –por ejemplo, los dados o las cartas– es un recurso eficiente para facilitar el reconocimiento de las cantidades. Un alumno que ha contado muchas veces 1, 2, 3 para reconocer la cantidad en la cara del dado con tres puntos, terminará por decir “tres” sin necesidad de apelar al conteo de uno en uno. Al mismo tiempo, la disposición de los puntos permite acceder a la composición aditiva de algunos números. Los chicos descubren que el 6 es $3 + 3$, que el 4 es $2 + 2$, que el 5 es $4 + 1$; en este sentido, colabora con la construcción del número, facilita el pasaje del conteo al cálculo y favorece el establecimiento de relaciones.

Un recurso para ampliar el intervalo numérico más allá del 6 (máximo posible en los dados) es realizar cartas en las que se reproduzcan tal cual las configuraciones de los dados del uno al seis, utilizando las mismas configuraciones para componer los números del siete al doce (Milliat y Neyret, 1990). Por ejemplo, para el número 7 habrá que realizar las siguientes cartas: $6 + 1$; $5 + 2$ y $4 + 3$; para el número 8: $6 + 2$; $5 + 3$ y $4 + 4$; para el 9: $6 + 3$ y $5 + 4$; para el número 10: $6 + 4$ y $5 + 5$; para el número 11: $6 + 5$, y para el número 12: $6 + 6$. En todos los casos hay que cuidar que las configuraciones aparezcan lo más diferenciadas posible.



Este material garantiza que los diferentes conocimientos de los que disponen los alumnos puedan ser utilizados. Habrá quienes, en un principio, necesiten contar todos los puntos para acceder a la cantidad representada; otros, al reconocer una de las cantidades, harán sobreconteo; otros reconocerán la configuración de las dos cantidades y resolverán con cálculo mental, y habrá quienes lean el número por reconocer su escritura. La aparición de estos diferentes procedimientos no sólo dependerá de los conocimientos que los alumnos tengan, sino también del tipo de problemas que se les planteen y de la inclusión o no de la numeración en las cartas.

Si la intención del maestro es que los alumnos se apropien de la lectura de los números, entonces cada carta debe incluir el número que le corresponde y los problemas a seleccionar serán, por ejemplo, todos aquellos que requieran de la comparación de cantidades y/o su denominación.

En cambio, si el maestro se propone promover el pasaje del conteo de uno en uno al cálculo, les dará a sus alumnos cartas con configuraciones pero sin números. La no inclusión de los números facilita la aparición de estrategias de sobreconteo y/o cálculo mental, apoyándose en el reconocimiento de las configuraciones para poder determinar la cantidad representada en cada carta, mostrando al mismo tiempo lo costoso del conteo de uno en uno. Si los alumnos saben leer los números hasta el 12 y la intención del docente es que paulatinamente realicen los cálculos sin apoyarse en las configuraciones sino que operen a nivel numérico, les dará las cartas que incluyen números y planteará, por ejemplo, problemas en los que haya que adicionar el valor de dos o más cartas.

En estos casos, las reflexiones que surjan en momentos de discusión acerca de cómo hacer para que los cálculos que les resultan difíciles se conviertan en fáciles promoverán avances en la apropiación de cálculos mentales aditivos (Parra y Saiz, 1992).

Estas reflexiones habría que orientarlas a que utilicen lo que saben para descubrir lo que no saben. Por ejemplo, si ya saben que $5 + 5 = 10$, entonces habría que preguntar cuánto es $5 + 4$, apuntando a que puedan pensar que como es uno menos, entonces el resultado también será uno menos y por lo tanto necesariamente 9. Con el mismo criterio $5 + 6$ “tiene” que ser 11 porque es uno más que $5 + 5$, etcétera. Un cálculo que en general les resulta difícil es $7 + 8$, y una estrategia que lo convierte en fácil es pensarlo como $7 + 7 + 1$, apoyándose en el conocimiento del cálculo de los dobles (Kamii, 1984). Al respecto, Kamii señala que hay combinaciones de cálculos que

son más fácilmente memorizadas que otras. El cálculo de dobles y las combinaciones en las que se añade 1 a un número son los primeros en aparecer. Entre los dobles, el primero en ser memorizado es $2 + 2$, luego $5 + 5$ y $10 + 10$, y a posteriori el resto de las combinaciones de números de una cifra.

Con este material, se pueden plantear, entre otros, juegos como los siguientes.

JUEGO DE PEDIDOS

- *Organización de la clase:* se juega de a tres o cuatro participantes, cada uno con su mazo de 18 cartas.
- *Descripción del juego:* se mezclan y se reparten todas las cartas. Cada jugador baja todos los pares de cartas con cantidades iguales que le hayan tocado quedándose en la mano solamente con las que tienen cantidades diferentes entre sí. Luego cada uno en su turno tiene que pedirle a un compañero la carta que necesita para formar un nuevo par y así poder bajarlo; si el compañero tiene la carta solicitada se la entrega, si no, pasa el turno. Gana el primero que logre bajar todas sus cartas.
- *Análisis de la situación:* esta situación fuerza en primer lugar a la comparación de cantidades para lograr encontrar dos cartas que tengan la misma cantidad y así poder bajarlas; en segundo lugar, fuerza a la denominación del número para poder hacer el pedido posterior.

Dependerá de la intención del maestro que las cartas tengan o no números. Si lo que el maestro ha decidido trabajar es la lectura de números porque sus alumnos aún no disponen de ese conocimiento, entonces su inclusión tendrá el sentido de hacerlos aparecer como una herramienta más económica que el tener que contar todos los puntos. Si en cambio su interés es que los alumnos descubran algunas composiciones aditivas de los números y, al mismo tiempo, evolucionen en las competencias del conteo, utilizará las cartas sólo con puntos.

Al tener que encontrar dos cartas con la misma cantidad de puntos descubrirán, por ejemplo, que tanto la que tiene 5 y 2 como la que tiene 4 y 3 suman 7, y de este modo comenzarán a apropiarse de algunas composiciones aditivas diferentes para un mismo número.

La complejidad de la tarea es distinta cuando el alumno hace el pedido que cuando debe decidir si alguna de las cartas que tiene corresponde al número que le han solicitado. Cuando pide necesita averiguar el valor de una carta, mientras que cuando recibe un pedido tiene que controlar cada una de las cartas que tiene en la mano.

Frente a esa dificultad, si bien algunos chicos necesitarán contar uno a uno todos los puntos para poder determinar la cantidad, progresivamente (si el material es usado reiteradamente) aparecerán procedimientos más evolucionados, como el sobreconteo al apoyarse en el reconocimiento de una de las configuraciones o, incluso, cálculos memorizados en algunos pares de números.

JUEGO DE LA GUERRA (Kamii, 1984)

- *Organización de la clase:* se juega de a dos participantes, con un mazo de cartas.
- *Descripción del juego:* se reparten todas las cartas y se ponen boca abajo. Los dos jugadores dan vuelta la primera carta al mismo tiempo, y el que tiene la cantidad mayor se las lleva. Si tuvieran la misma cantidad, tapan con una segunda carta y dan vuelta una tercera, el que tiene la cantidad mayor se lleva todas. Gana el que al finalizar el juego haya logrado llevarse más cartas.
- *Análisis de la situación:* dependerá de la cantidad y de la inclusión o no de los números en las cartas que el reconocimiento de las relaciones "mayor", "menor" e "igual" lo hagan de manera directa por el reconocimiento de la configuración, por la lectura de la cifra o que necesiten realizar el conteo de los puntos. El intercambio posterior favorecerá que los alumnos puedan descubrir nuevos modos de resolución.

ARMAR EL NÚMERO MAYOR (Kamii, 1984)

- *Organización de la clase:* se juega de a dos participantes.
- *Descripción del juego:* se mezclan los dos mazos de cartas que contienen números, se reparten todas y se las coloca boca abajo. Los dos jugadores dan vuelta las dos primeras al mismo tiempo y las acomodan para formar el mayor número posible. Por ejemplo, si un jugador da vuelta un 3 y un 7 y las deja así, obtendrá 37; pero si invierte la posición, será 73. El que tenga el número mayor se lleva las cuatro cartas. Gana el que al finalizar el partido haya logrado obtener la mayor cantidad de cartas.
- *Análisis de la situación:* una cuestión importante es cuidar que los niños jueguen sentados uno al lado del otro, y no enfrentados, ya que esto agregaría la dificultad de la lectura de los números invertidos.
¿Poder resolver este problema requiere del dominio de la lectura de los números? Como se vio más arriba, los chicos disponen de hipótesis para comparar números de igual o diferente cantidad de cifras, aun en el caso de no poder denominarlos convencionalmente.

5.2. Situaciones donde los números son utilizados como memoria de la posición

Presentamos también algunos juegos útiles para trabajar con la memoria de la posición, es decir, todas las situaciones que requieran de la determinación de una posición en una serie ordenada numéricamente: calendarios y agendas para anotar cumpleaños y festejos especiales; el lugar en la fila, en el perchero o en el registro de asistencia; álbumes de figuritas llevando el control de las que ya se han pegado y las que aún falta pegar en tablas de números; etcétera.

DOMINÓ DE CARTAS (Kamii, 1984)

- **Materiales:** un mazo de barajas españolas, que incluya los 8 y los 9.
- **Organización de la clase:** se juega de a dos.
- **Objetivo del juego:** armar las cuatro series de números ordenados desde el 1 al 12, respetando los palos (oros, bastos, espadas, copas).
- **Descripción del juego:** se reparten cinco cartas a cada jugador y el resto del mazo se pone boca abajo en el centro de la mesa. Si alguno tiene un 1 lo pone, si no, toma una carta del mazo; si le tocó un 1 lo pone y si no pasa el turno. Por turnos, irán completando las series. Gana el primero que se quede sin cartas.
- **Análisis de la situación:** esta situación requiere del control simultáneo de dos variables: por un lado, el orden de la serie numérica; por el otro, el palo de las cartas. Esto puede ser un obstáculo para algunos chicos, ya que muchas veces la centración en un aspecto impide el control del otro. Por ejemplo, podría suceder que en la serie de los oros, debajo del 5 alguien coloque el 8 de oros; en este caso estaría centrado en la variable palo perdiendo el control de la serie numérica. A la inversa, en la serie de las copas, alguien puede poner debajo del 7, el 8 de oros, lo que indicaría que está centrado en la serie numérica. Si sucediera esto, ¿significaría que el problema fue mal elegido porque los alumnos no lo resuelven perfectamente? Pero, ¿cómo podrían aprender a resolverlo si no tienen la posibilidad de enfrentarse a él?

Seguramente, los errores serán denunciados por el otro jugador o puestos en evidencia por el docente al preguntar si están de acuerdo en que después del 5 esté el 9, lo que permitirá adquirir progresivamente un mayor dominio.

- **Extensión posible del problema:** armar las series del 12 al 1. El conteo de uno en uno de manera descendente puede ser abordado —entre otras— por esta situación.

SITUACIONES DE ASCENSORES

Problemas del tipo: "El edificio de Mercedes tiene 20 pisos. Ella vive en el piso 14. Si comparte un viaje en el ascensor con sus vecinos de los pisos, 19, 3, 15 y 7, ¿en qué orden habrá que tocar los botones del ascensor si parten de la planta baja?".

5.3. Situaciones en las que los números son utilizados como recurso para anticipar resultados

Todas las situaciones que impliquen transformaciones que afecten la cardinalidad de una colección, como agregar, reunir, quitar, separar y repartir, permiten el aprendizaje de los números como recurso para anticipar resultados.

IGUALAR CANTIDADES (Moreno y Sastre, 1986)

- **Materiales:** dos cajas, una con tres fichas y la otra con cinco fichas. Fichas sobre la mesa. Lápiz y papel.
- **Organización de la clase:** trabajo individual.
- **Consigna:** "Hacé lo que te parezca mejor para que en las dos cajas haya la misma cantidad de fichas. Después, con lápiz y papel, hacé lo necesario para mostrar cómo lo resolviste".
- **Análisis de la situación:** para igualar las cantidades, los alumnos podrán tomar dos fichas de la mesa, agregarlas a la caja que tiene tres e igualar en cinco; podrán sacar dos fichas de la caja que tiene cinco e igualar en tres, o sacar una ficha de la caja que tiene cinco, agregarla a la que tiene tres e igualar en cuatro. Este tipo de situación pone de manifiesto que un mismo problema puede ser resuelto de diferentes maneras e, incluso, obtener resultados diferentes, todos ellos correctos, lo que justifica y enriquece las confrontaciones posteriores. La representación gráfica, la puesta en común de los diferentes procedimientos y las reflexiones consecuentes permitirán la toma de conciencia por parte de los alumnos de las acciones realizadas.

JUEGO DE LOS "CINCO" (Kamii, 1984)

- **Materiales:** 32 cartas numeradas del 1 al 4 (repetidas ocho veces cada una).
- **Organización de la clase:** se puede jugar en grupos de hasta cuatro chicos. Se reparten todas las cartas y cada uno pone las suyas boca abajo. Deciden quién va a empezar, y éste da vuelta su primera carta. Luego lo hace el que está a su derecha; si las dos cartas suman 5, se las lleva. Si no, juega el tercero quien trata de formar 5 con su carta y las que están sobre la mesa; si logra reunir esa cantidad, se lleva las cartas que utilizó y pasa el turno. Así sucesivamente hasta que se terminen todas las cartas. Gana el que haya logrado reunir mayor cantidad de "cinco".
- **Extensión posible:** jugar a componer los números siguientes a 5, para lo cual habrá que agregar cartas cuyas adiciones permitan la composición del número elegido.
- **Análisis de la situación:** este problema permite trabajar de manera exhaustiva todas las posibles composiciones aditivas de los números involucrados. En este sentido, es un medio muy apto para plantear reflexiones con los alumnos, acerca de la búsqueda y el establecimiento de diferentes estrategias que faciliten la resolución de los cálculos, apoyándose en los que ya conocen. En el caso de que los alumnos no dispongan aún de la posibilidad de operar con cifras, se pueden utilizar las cartas con configuraciones espaciales y números descriptas en la página 114.

SITUACIONES QUE IMPLIQUEN PARTICIONES

- **Materiales:** entre diez y quince figuritas para cada grupo y hojas en cantidad necesaria sobre el escritorio del maestro.
- **Organización de la clase:** trabajo en pequeños grupos.
- **Consigna:** "Hay que pegar las 12 figuritas que les di en varias hojas, cada hoja tiene que tener la misma cantidad de figuritas. Discutan entre ustedes para saber cuántas hojas van a necesitar. Cuando lo decidan, un secretario va a venir a mi escritorio a pedírmelas".
- **Análisis de la situación:** el hecho de tener que realizar el pedido de hojas fuerza a la anticipación del resultado de la partición. En los primeros intentos de resolución es posible que le pidan al maestro tantas hojas como figuritas tienen. Una manera de provocar un avance es poner una restricción en la consigna (variable didáctica) que impida esa estrategia; por ejemplo, aclarando que sólo pueden pedir hasta cinco hojas.

6. ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

Si, como vimos, los alumnos de Nivel Inicial disponen de conocimientos previos acerca de la organización y regularidad del sistema de numeración, hay que tomar en cuenta estos saberes, aunque sean incompletos e inestables, para que los niños, a partir de ellos, puedan otorgarles sentido a los contenidos que se desean transmitir. Desde esta perspectiva, la idea es trabajar con la numeración escrita asumiendo toda la complejidad que esto implica (Lerner y Sadovsky, 1994).

Para aprender, los niños necesitan usar los números, reflexionar sobre ellos y, a partir de allí, construir la regularidad y la organización del sistema de numeración. ¿Qué significa usar los números? Es poder nombrarlos, escribirlos e interpretarlos a su manera; compararlos; utilizarlos para resolver y/o representar el procedimiento elegido en la resolución de un problema, para comunicar y confrontar dichos procedimientos, etcétera. Pero, ¿todo esto será posible si solamente se trabaja con los números del 1 al 9? Ya se dijo que restringir de tal modo el campo numérico impide a los chicos poner en juego lo que saben, y al mismo tiempo significa desconocer que no se puede, por ejemplo, aprender el 5 de manera aislada, sin poder relacionarlo con el 4 y el 6, encontrando en qué se parece y se diferencia del 15, del 35 y del 50.

Con relación a esto, la enseñanza tradicional propone, como ya vimos, enseñar los números uno a uno. Una situación que se utiliza frecuentemente es hacer copiar renglones del número que se está trabajando ese día. Hacer renglones del número 5, ¿qué aspectos del número permite trabajar? Como no aparece asociado a ningún significado, las distintas funciones y usos no pueden ser abordados, no hay manera de hacer una distinción explícita acerca de si expresa una cantidad, un orden, un código, etcétera. Por otra parte, la numeración presentada de ese modo no es estudiada en sus principios, organización y regularidad, sino que es simplemente evocada a través de la representación convencional de los números.

6.1. Bandas numéricas

Los principios, regularidades y organización del sistema van a poder ser establecidos en la medida en que los alumnos puedan trabajar con números de igual y diferente cantidad de cifras en distintos intervalos de la serie numérica (Lerner y Sadovsky, 1994).

Por otra parte, el que los chicos puedan recitar la serie de manera oral hasta un determinado número no significa que puedan escribirlos ni leerlos a todos. ¿Cómo hacer para que los alumnos puedan utilizar números mayores a los que saben leer y escribir? Un recurso para resolver este problema didáctico es utilizar bandas numéricas (Thomas, 1988).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

¿Por qué utilizar bandas numéricas?

En primer lugar, el sistema de numeración, como objeto cultural que es, constituye una convención. Todo conocimiento surgido de convenciones elaboradas por la gente tiene como principal característica el depender de la información que se reciba para poder ser aprendido.

El hecho de que la cantidad siete, como tal, represente la misma cantidad de elementos independientemente de la cultura de la que se trate, no significa que la única manera de representar esa cantidad sea a través de la palabra siete o el numeral 7. La denominación verbal depende del idioma, y la representación matemática, del sistema de numeración que se utilice.

Las reglas de nuestro sistema (posicional y en base diez) no están explicitadas en la escritura de los números, sólo pueden ser interpretadas por aquellos que dispongan del conocimiento necesario. No hay posibilidad de que los niños descubran estas propiedades implícitas si no tienen contacto con portadores de información que les permitan reflexionar acerca de esas particularidades.

En segundo lugar, las bandas son un portador de información que refleja la organización del sistema, que muestra claramente que algunas de las cosas que ellos saben de la numeración hablada también suceden en la numeración escrita: "Después de los "diecis", "veintis", "treintis", se empieza otra vez con el 1, 2, 3, hasta el 9" dicen los chicos.

Por otra parte, permiten acceder a una representación mental del sistema de manera integrada, ni parcial ni desconexa, lo que favorece el establecimiento de relaciones entre diferentes intervalos numéricos.

¿Hasta que número extender la banda? ¿Qué conocimientos previos requiere su uso?

Para poder decidir hasta qué número incluir, es necesario que el docente haya indagado previamente sobre la extensión del recitado de la serie que sus alumnos poseen. Si la mayoría de la clase puede contar hasta 10, entonces la banda debe llegar hasta el 30, es decir, siempre tiene que tener más números que los que los alumnos saben contar, ya que esto permitirá descubrir que la serie de los números se prolonga más allá de lo que ellos saben, pero siempre con la misma organización.

A medida que los chicos avancen en el conocimiento de la serie, habrá que ir agregando nuevas "familias" de números hasta llegar al 100.

¿El hecho de que no sepan leer y escribir esos números incide en la decisión de la extensión? Justamente porque asumimos que no van a disponer de la escritura y la lectura convencional de muchos de ellos es que sugerimos este recurso didáctico.

¿Cómo utilizar las bandas para leer y escribir números?

Supongamos que el docente le entrega a Joaquín un papel donde escribió el número 15 y le pide (sin nombrar el número) que le dé a Julián tantas fichas como dice el papel. Si Joaquín no sabe leerlo, el maestro puede indicarle que use la banda para averiguarlo. Joaquín comenzará entonces a contar desde el 1 señalando con el dedo cada uno de los números de la serie hasta llegar al 15 y de esa manera sabrá que al 1 y el 5 le corresponde la palabra quince y podrá resolver el problema. Del mismo modo, si la consigna verbal que le da el maestro fuera que tiene que mandar un mensaje a un compañero escribiendo el número 15, recitará la serie desde el 1 señalando los números y donde coincida la palabra quince con el número señalado, sabrá que se escribe con el 1 y el 5.

¿Qué tipos de problemas permiten plantear las bandas?

- Comparar números: ¿Cuál es más grande, el 17 o el 27?, ¿por qué?
- Determinar el antecesor y el sucesor.
- ¿Dónde están todos los números que empiezan con 1? ¿Y los que terminan con 7?
- ¿Cuál es la familia del 25? ¿Y la del 45?
- ¿Cuántos números hay entre el 9 y el 19? ¿Y entre el 29 y el 39?
- Alguien pensó un número: está en la familia de los "veinti", es más grande que el 25 y más chico que el 27, ¿cuál es?
- Completar bandas a las que les faltan algunos números.
- Averiguar cuál es el número que está tapado.

¿Qué tipo de procedimientos pueden aparecer?

Jugando a la lotería con una banda hasta el 99 en una sala de 5 años, sobre el final del año escolar aparecieron las siguientes estrategias: algunos

chicos necesitaban comenzar a contar desde el 1 para encontrar algunos números; otros podían centrarse en el nudo de la decena y desde allí, contando de uno en uno, encontraban el número cantado (por ejemplo, para encontrar el 45 hacían "40, 41, 42, 43, 44, 45"); otros buscaban el nudo de la familia y la columna correspondiente al valor de la unidad estableciendo las coordenadas ("45 está en la familia de los "cuarenti" y en la fila de los que terminan en 5"), y algunos otros podían marcar el número directamente por reconocer su escritura.

¿Sería válido plantear este problema si los chicos necesitaran contar de uno en uno desde el 1 para encontrar el 45, por ejemplo? Es precisamente lo costoso que resulta ese procedimiento lo que les va a permitir a esos alumnos evolucionar en sus conocimientos, buscando nuevos modos de resolución. Las intervenciones que el docente haga en ese sentido serán fundamentales. Un docente puede intervenir desde la concepción de que se es un buen maestro si los alumnos resuelven siempre correctamente y utilizando solamente el saber formal. En este caso, les "dirá" cuál es el número. Otro maestro, convencido de que saber matemática es construir el sentido de los conocimientos y que para esto un alumno tiene que poder actuar, decidir, reintentar, explicar, etcétera, podrá ofrecerle desde su intervención, recursos para seguir pensando. En este caso podría preguntar, ¿te serviría pensar en cuál es la familia del 45?

Es importante que la banda esté colocada en un lugar de la clase que permita que los chicos se acerquen a ella y les sea posible tocar los números. Los maestros se sorprenden del interés que despierta y describen cómo se acercan los chicos espontáneamente a compartir lo que saben y también para discutir diferentes concepciones.

La elaboración de bandas individuales es también un recurso adecuado para promover las reflexiones en las que estamos interesados.

7. ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES

Enseñar matemática desde el enfoque de la didáctica de la matemática implica asumir un cambio profundo en las relaciones entre los alumnos, el maestro y el saber.

Si lo que se quiere lograr es que los alumnos tomen conciencia de que hacer matemática es resolver problemas y reflexionar sobre ellos, será ne-

cesario tomar como objetivo específico de la enseñanza el desarrollo de ciertas competencias y actitudes en los alumnos que les permitan:

- comprometerse en la resolución de problemas;
- desarrollar la capacidad de construir una representación personal del problema;
- asumir que resolver un problema no es una tarea fácil sino que implica buscar, probar, decidir, rechazar, recomenzar, etcétera;
- descubrir que un mismo problema puede ser resuelto de diferentes maneras;
- saber que pueden decidir (porque justamente es lo que se espera de ellos) entre usar materiales, dibujos, representaciones mentales, bandas numéricas, cálculos memorizados, etcétera;
- reconocer la necesidad de dejar registro escrito de lo que han producido cuando esto sea posible;
- explicar, comparar, discutir y validar los diferentes procedimientos que puedan haber surgido.

La introducción de estas reglas del trabajo matemático requiere una actitud docente que:

- advierta la necesidad de conocer lo que sus alumnos saben en relación con el alcance del conteo, los procedimientos de resolución, los recursos de representación, las concepciones del sistema de numeración, etcétera, para asegurarse de que los problemas que va a plantear sean un medio apto para que esos saberes previos puedan entrar en juego y, al mismo tiempo, aparezcan como insuficientes, con la intencionalidad de hacerlos avanzar;
- permita tolerar la diversidad e inestabilidad de los saberes de sus alumnos otorgándoles diversas oportunidades de volver a enfrentarse a situaciones que han generado dificultad;
- aliente a los alumnos a emprender una búsqueda personal frente a un nuevo tipo de problema, evitando las intervenciones que denoten una valoración por algún procedimiento en particular que desacredite los restantes;
- transmita la necesidad de reflexionar acerca de los problemas, precisando las condiciones para que esto sea posible. No se trata de que en una

puesta en común todos los alumnos comuniquen sus procedimientos, sino de que se analicen solamente aquellos que sean diferentes. Respetar las ideas de los otros, esperar el turno para hablar, escucharse, no son muchas veces actitudes que los niños posean. Habrá que asumirlo entonces como parte del trabajo en el proceso de la enseñanza y del aprendizaje;

- pueda flexibilizar las condiciones de trabajo en la clase. Dependerá del tipo de situación que los alumnos trabajen individualmente, en pequeños grupos o todos a la vez. Quizá no se pueda explicar la consigna de un problema nuevo a todos los grupos al mismo tiempo. El maestro podrá decidir, entonces, hacerlo con dos grupos mientras el resto de los alumnos resuelven un tipo de problema ya conocido o trabajan en otra área. Del mismo modo, si necesita observar los diferentes procedimientos que surgen en un tipo de problema nuevo o no, podrá tomar la misma decisión;
- También es necesario que el docente anticipe momentos en los que los conocimientos puestos en juego sean identificados como aquellos que deberán poder ser reutilizados (institucionalización).

En resumen, trabajar desde este enfoque requiere conocer los saberes previos, alentar la búsqueda de nuevas estrategias, animar a los que están detenidos, hacer circular el saber: permitir descubrir el placer de hacer matemática.

Quisiera enfatizar aquí una contradicción que muchas veces la enseñanza tradicional plantea. Son numerosos los docentes que expresan la sensación de que sus alumnos saben mucho más que lo que se trabaja en la clase, que se sorprenden al observar que sus alumnos en situaciones informales de juego utilizan los números, para nombrarlos, calcular, etcétera ¿Por qué entonces no hacer caso de estas evidencias? Proveer a los alumnos de situaciones a las que puedan enfrentarse con sus recursos y, al mismo tiempo, generar las condiciones para que estos recursos evolucionen permitirá que los alumnos se impliquen en el trabajo matemático sabiendo que sus conocimientos son tenidos en cuenta y valorados, disminuyendo así la fractura entre lo que los niños saben y lo que la escuela les reconoce.

Soy consciente de que no siempre es fácil abandonar lo conocido, lo probado, ya que esto da seguridad. Pero como docentes comprometidos con la tarea de enseñar, no podemos olvidarnos de nuestro propio placer por

aprender. Emprender nuevos caminos puede ser una experiencia enriquecedora y apasionante. ¿Por qué privarse de ello?

BIBLIOGRAFÍA

- Baroody, A. (1988): *El pensamiento matemático en los niños*, Madrid, Visor.
- Brissiaud, R. (1987): *¿Contar en el jardín de infantes? Sí, pero...*, conferencia dictada en Saint-Brieuc, Francia (traducción: B. Capdevielle, L. Varela, P. Willson).
- Brousseau, G. (1986): "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 7, 2.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Brun, J. (1994): "Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques", en M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot (comps.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Carpenter, T. P.; J. Hiebert y J. M. Moser (1981): "Problem structure in first-grade children's initial solution process for simple addition and subtraction problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, 12.
- Charnay, R. (1994): "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Charnay, R. y D. Valentin (1992): "¿Cálculo o conteo? ¡Cálculo y conteo!", *Grand N*, 50, Buenos Aires.
- Chevallard, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1992): "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 12, 1, pp. 73-112.
- Fayol, M. (1985): "Número, numeración, enumeración: ¿qué se sabe de su adquisición?", *Revue Française de Pédagogie*, 70, Dijon.

- Fuson, K. (1982): "The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results", en T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (comps.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.
- Fuson, K. y J. Hall (1983): "The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review", en H. Ginsburg (comp.), *The Development of Mathematical Thinking*, Nueva York, Academic Press.
- Fuson, K.; J. Richards y D. Briars (1982): "The acquisition and elaboration of the number word sequence", en C. J. Brainerd (comp.), *Children's Logical and Mathematical Cognition: Progress in Cognitive Development*, Nueva York, Springer-Verlag.
- Fuson, K.; W. S. Segada y J. W. Hall (1983): "Matching, counting, and conservation of numerical equivalence", *Child Development*, 54.
- Gelman, R. (1977): "How young children reason about small numbers", en N. J. Castellan, D. B. Pisoni y G. R. Potts (comps.), *Cognitive Theory*, vol. 2, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.
- (1983): "Les bébés et le calcul", *La Recherche*, 14, Francia.
- Gelman, R. y C. R. Gallistel (1978): *The Child's Understanding of Number*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- Gelman, R. y E. Meck (1983): "Preschooler's counting: Principles before skill", *Cognition*, 13.
- Gilly, G.; J. P. Roux y A. Trognon (1999): *Apprendre dans l'interaction: analyse des médiations sémiotiques*, Presses Universitaires de Nancy y Publications de L'Université de Provence.
- Hughes, M. (1987): *Los niños y los números*, Barcelona, Planeta.
- Kamii, C. (1984): *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*, Madrid, Visor.
- Lerner, D. y P. Sadovsky (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Milliat, C. y R. Neyret (1990): "Juegos numéricos y elaboración de reglas en el nivel inicial", *Grand N*, 46, Buenos Aires.
- Moreno, M. y G. Sastre (1986): *Las escrituras aritméticas*, Barcelona, IMIPAE.
- Panizza, M. y P. Sadovsky (1992): *El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos*, Buenos Aires, FLACSO.

- Parra, C. e I. Saiz (1992): *Los niños, los maestros y los números*, Desarrollo Curricular, Matemática primero y segundo grado, Dirección de Currículum, Dirección General de Planeamiento, Secretaría de Educación, MCBA.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993): "Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des Mathématiques dans des classes 'faibles'", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 13, 2.
- Schaeffer, B.; V. H. Eggleston y J. L. Scott (1974): "Number development in young children", *Cognitive Psychology*, 6.
- Sinclair, A.; C. Tièche-Christinat y A. Garín (1994): "Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres?", en M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavinot: *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Thomas, J. (1988): *Un, deux, ... beaucoup passionément! Les enfants et les nombres*, Francia, INRP.

4

EL CONTEO EN UN PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN: UNA GÉNESIS POSIBLE EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Olga Bartolomé
Dilma Fregona

Un niño que recita la sucesión de números naturales hasta el seis porque su maestra se lo pidió, un niño que pone seis fichas en una caja siguiendo una indicación de su maestra, y un niño que cuenta solamente mirando seis fichas contenidas en una caja, son situaciones diferentes en relación con un mismo conocimiento.

GUY BROUSSEAU (1995)

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los números naturales —la escritura, el orden, las operaciones y sus propiedades— ocupa un espacio muy amplio en los programas de Matemática de la escolaridad obligatoria, y se inicia con mayor o menor énfasis en el Nivel Inicial.

Un breve recorrido histórico de los últimos cuarenta años muestra diferentes tendencias en la enseñanza.¹ Hacia los años cincuenta —y antes también— los números se estudiaban por segmentos: de 1 a 5, luego de 5 a 10, luego de 10 a 20. Cada número se presentaba a los alumnos con el mismo escenario: presentación del nuevo número en relación con el precedente (se "suma 1", a veces con la ayuda de colecciones de objetos, o según constelaciones determinadas), descomposición (fundamentalmente aditiva), nombre del número y escritura (reforzada con actividades manuales). El

1. Este recorrido está tomado de ERMEL (1990) y describe la enseñanza en Francia, pero corresponde globalmente a las propuestas editoriales en la Argentina.

alumno aprendía primero los números, luego el algoritmo de las operaciones, y finalmente resolvía problemas para reconocer las ocasiones de empleo de dichas operaciones.

A principios de los sesenta, las representaciones geométricas de las colecciones (para los diez primeros números) abrieron el paso a materiales estructurados por el número o por las relaciones entre los números.² A partir de 1970, la llamada "reforma de la matemática moderna" introdujo cambios importantes en la enseñanza, en particular en lo relativo a los números. Las concepciones de aprendizaje que influyeron en esta reforma estaban ampliamente inspiradas en las ideas estructuralistas e invocaban frecuentemente los trabajos de Piaget. En lo que hoy se designa como una tendencia aplicacionista³ de los resultados de Piaget al aula, el número deviene en la escuela "la síntesis del orden y de la inclusión jerárquica".

Se ve así que en el Nivel Inicial hay un neto retroceso en las actividades que utilizan los números y, simultáneamente, un desarrollo de las actividades a menudo calificadas como prenuméricas. El uso de los números se reemplaza por una "aproximación" a la noción de número natural, adquieren un lugar de importancia las actividades relativas a establecer correspondencias uno a uno (biyecciones) entre los elementos de dos colecciones bien definidas, las designaciones (de objetos y conjuntos), la clasificación, el orden y las representaciones gráficas.

Esta concepción del número como "cardinal de conjuntos finitos" es una transposición muy directa a la enseñanza de la "definición" de los números naturales dada por los matemáticos en el marco de la teoría de conjuntos. Al respecto, Freudenthal (1973) afirma:

En la génesis del concepto de número, el número "para contar" juega el primer rol y el más importante [...]. De ninguna manera el niño constituye

2. Nos referimos a las regletas de los números en colores de Cuisenaire y Gattegno, donde la regleta que representa el 10 es naranja porque 10 es múltiplo de 5 (amarilla) y de 2 (roja).

3. Así llamada por Brun (1994) y otros investigadores, designa las posiciones que consideran a la enseñanza como un terreno modelable según los avances de las investigaciones acerca del desarrollo del niño, lo cual convierte esos resultados en normativas para la enseñanza. G. Ricco (citada por Brun, 1994) analizó diferentes tentativas de programas escolares que trataron de seguir la evolución de la psicología genética.

el número como clase de conjuntos equivalentes, aún inconscientemente. El hecho de insistir en esta invariancia por biyecciones es una actitud de matemático adulto que no puede olvidar su propia teoría de los números naturales. Ahora bien, los niños aprenden esta invariancia en un contexto mucho más amplio, se dan cuenta de que si cuentan otra vez mañana los dedos de su mano, encontrarán 5, y que todos los hombres tienen lo mismo de ciertas cosas y que el número de bolas en un pañuelo no cambia si se dice "abracadabra". La invariancia por biyecciones es un punto álgido en este contexto, un *hobby* de adultos que lo venden como aspecto cardinal [...].

¿Y ahora qué? El péndulo que recorre posiciones a veces antagónicas sigue oscilando. Tal vez la única manera de tomar posiciones más equilibradas provenga de la investigación en educación matemática. Allí también, en el dominio de la investigación, hay multiplicidad de enfoques y recursos para enseñar los números naturales.

Tendencias actuales proponen constituir en el ámbito escolar un dominio de experiencias donde la cuantificación ocupe un lugar de importancia para ampliar y consolidar los conocimientos que los niños ya tienen acerca de lo numérico. Si bien los números naturales "se usan" cotidianamente en múltiples circunstancias, el medio natural o social raramente plantea problemas donde los números naturales sean la solución a ese problema. Proponer dichos problemas es responsabilidad de la escuela, y elaborarlos es una tarea específica de la didáctica de la matemática.

¿Qué problemas son los que involucran necesariamente la noción de número natural? Una respuesta a esta cuestión es central en este artículo, y la elaboramos desde la *teoría de las situaciones didácticas*, utilizando dos nociones básicas: *situación didáctica* y *variable didáctica*.

En la comunidad francesa de investigación en didáctica de la matemática, Brousseau comenzó a publicar en 1972 artículos que constituirían lo que años más tarde se llamó la *teoría de las situaciones didácticas*. "La idea fundamental [en la teoría de las situaciones didácticas] consiste en postular que cada conocimiento o cada saber debe poder ser determinado por una situación" (Brousseau, 1990). El autor propone realizar un estudio epistemológico de ese conocimiento o saber en cuestión para analizar las condiciones que determinaron su origen y/o evolución, y luego, a través de las situaciones didácticas, elaborar una génesis artificial que intente recuperar algunas de esas condiciones de modo tal que el

conocimiento a enseñar sea la respuesta óptima para esa organización dada.⁴ Algunas de esas condiciones pueden variarse a voluntad del docente y constituyen una *variable didáctica* cuando, según los valores que toman, modifican el conocimiento necesario para resolver la situación. Volveremos sobre esto más adelante, en el apartado 5, donde analizaremos dos actividades en las cuales, desde el marco teórico que tomamos como referencia, los números naturales son la solución óptima para resolver las situaciones planteadas. Dichas situaciones propuestas por Brousseau (1994; Brousseau y Foucaud, 1992) son las que corresponden a problemas de distribución: se trata de *anticipar* la cantidad de objetos necesarios para distribuir cierto número de ellos (1, 2, 3, 4) a cierto número de destinatarios (puede variar desde un número menor que 10 a, por ejemplo, 25 o 30).

¿Por qué esas situaciones didácticas conducen a que los niños se encuentren con el conteo y los números naturales? Vamos a elaborar una respuesta, y para ello revisaremos algunos aspectos fundamentales del objeto de enseñanza que nos ocupa.

2. LA IDEA DE NÚMERO NATURAL Y LA ESCRITURA DE LOS NÚMEROS

Por ser un conocimiento socialmente muy difundido, resulta difícil pensar a los números naturales como un objeto que merece cierto análisis. Sin embargo, es necesario problematizar esta noción para tratar de cubrir, en la enseñanza, los diferentes aspectos a los que se asocia. Trataremos aquí de presentar, a través de un recorrido histórico, cuáles son los supuestos orígenes del número natural —como herramientas para resolver problemas de conteo— y distinguir la génesis de la noción de número de la génesis de los sistemas de escritura. A continuación, abordaremos someramente dos aspectos constitutivos del número: las nociones de cardinal y de ordinal.

4. La situación didáctica siempre está referida a un conocimiento bien determinado, un problema es un elemento del medio organizado para que el alumno se encuentre con ese conocimiento, pero en el estudio del medio intervienen muchas otras decisiones además de la elección del problema.

2.1. Breve recorrido histórico

Los números naturales son los números que usamos para contar: 1, 2, 3, 4, ..., 27, ..., 89, ..., 9650, ..., 23 564 456, ... Cada uno de estos símbolos y el nombre correspondiente nos permiten identificar cuántos elementos tiene una colección determinada. Los números naturales permiten responder, entonces, a la pregunta ¿cuántos hay? Los diferentes sistemas de numeración que el hombre desarrolló en el transcurso del tiempo hacen que no sea necesario tener presentes los objetos para recordar cuántos hay o para comunicar cuánto tenemos; además, según el grado de desarrollo alcanzado, los sistemas de numeración permiten realizar diferentes cálculos y anticipar una enorme gama de hechos.

Aunque no hay documentos escritos para reconstruir el origen de las nociones de número natural y sistema de numeración, hay testimonios que permiten asegurar que la idea de número es mucho más antigua que los descubrimientos tecnológicos, tales como el uso de los metales o de los vehículos de ruedas (Boyer, 1969). En la República Checa se descubrió un hueso en el que aparecen 55 incisiones bastante profundas distribuidas en dos series, una con 25 y otra con 30, y en cada serie las marcas están agrupadas de a cinco. A este hueso, que sobrevivió unos 30 000 años, se le atribuye significado numérico porque se supone que el hombre prehistórico a veces registraba una cantidad cortando muescas en un palo o en un trozo de hueso.

¿Por qué esas muescas sobre el hueso se relacionan con la noción de número? En realidad es una conjetura, como toda afirmación que se haga acerca de los orígenes de la aritmética, ya que los inicios de ese dominio son más antiguos que la escritura. Se supone que gradualmente surgió la idea de usar una correspondencia uno a uno, y para cantidades pequeñas empezaron a hacer corresponder un dedo (de las manos o de los pies) a cada objeto enumerado. Como observó Aristóteles, lo difundido del sistema decimal es una consecuencia de un hecho anatómico: tenemos dos manos y dos pies, cada uno con cinco dedos.

En español, la palabra “enumerar” remite al conteo y, en consecuencia, necesariamente al uso de los números. Pero en otros idiomas, por ejemplo en francés, “enumerar” significa enunciar uno a uno los objetos, hacer una lista sin necesidad de asignarles una palabra-número. Aún hoy, cuando la

mayor parte de la humanidad cuenta con un sistema de numeración, hacemos periódicamente enumeraciones.⁵

Una correspondencia uno a uno permite abordar una cantidad sin utilizar necesariamente el número, y de ese modo podemos interpretar los registros en el hueso. Se necesitaron muchos siglos para pasar de las rayas sobre un hueso a un lenguaje (escrito o hablado) que constituyera un sistema de numeración. Las expresiones verbales numéricas primitivas se referían a colecciones específicas de objetos, tales como “dos peces” o “dos mazas”; mucho más tarde la palabra “dos” expresó la idea numérica de todas las colecciones que tienen un par de elementos. Además, a cada cantidad de objetos le correspondía una palabra diferente sin ninguna ley de formación que permitiera, como en nuestro actual sistema, recordar el nombre de los números. Es fácil imaginar entonces que había muy poca gente que sabía contar, y para grandes colecciones no había un modo de determinar su cantidad.

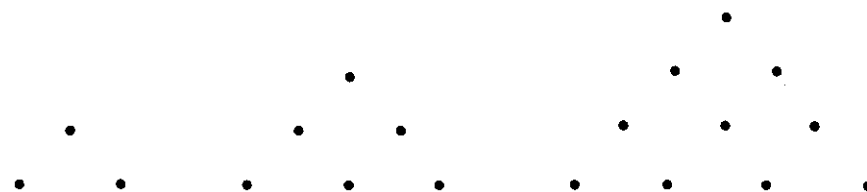
Con un desarrollo muy rudimentario de la numeración, el hombre comenzó a dominar algunos hechos relacionados con las cantidades y los tamaños. La matemática comenzó a ayudar al hombre a investigar y controlar la naturaleza a través de conocimientos sobre los pesos y las medidas, las formas simples tales como rectas, triángulos y círculos, etcétera. Fueron los griegos de los siglos VI, V y IV antes de Cristo quienes –según una reconstrucción realizada sobre la base de una tradición no demasiado fidedigna– comenzaron a proponer algún tipo de demostración y se preocuparon por una organización deductiva de la matemática.

Los griegos fundaron la aritmética, es decir, el estudio del concepto de número. Las dos civilizaciones que los precedieron en las cuales un cierto tipo de matemática había florecido, la egipcia y la babilónica, habían adquirido los rudimentos de estos temas. El tratamiento que caracteriza a los

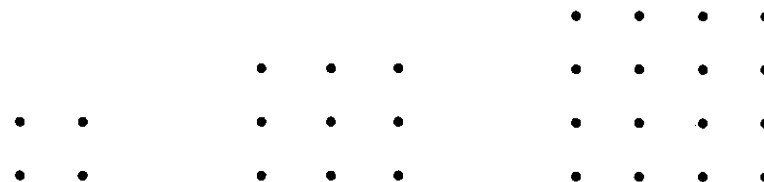
5. Dos ejemplos tomados de la vida cotidiana ilustran esta práctica: cuando uno lleva una lista para hacer las compras en el supermercado, en algún momento controla si en el changuito están todos los objetos de la lista. Allí uno descubre si falta algo o está todo, sin necesidad de que intervenga el número para resolver esa cuestión. Es común decir: “Me faltan tres cosas: sal, pan y café”, pero el número no es un conocimiento necesario para resolver el problema, lo central es distinguir cuáles son los elementos de la lista que todavía no fueron seleccionados. Otro ejemplo: al entrar a una sala donde se dicta una conferencia, “a ojo” después de mirar un poco se puede determinar si hay más gente que asientos. En estos ejemplos el conocimiento que interviene es una correspondencia uno a uno, entre las palabras de la lista y los objetos del changuito en el primer caso, y entre las personas presentes y los asientos de la sala en el segundo.

conceptos básicos de la aritmética, especialmente de los números naturales y de las fracciones, fue inaugurado por los pitagóricos, un grupo o escuela de matemáticos cuyo nombre deriva de Pitágoras, líder legendario.⁶

Probablemente porque no tenían símbolos numéricos, los pitagóricos representaron los números naturales ubicando guijarros en el suelo o puntos en la arena. Clasificaron los números de acuerdo con las formas que se pueden producir al acomodar de cierta manera los puntos o guijarros. El 1 se forma con un punto; 3 unidades pueden configurar un triángulo, y también 6, 10, 15, 21, 28... Esos números se denominan *triangulares*.



También había números *cuadrados*, por ejemplo: 4, 9, 16, 25... porque esas cantidades de puntos pueden organizarse formando un cuadrado.



6. “El hecho de que Pitágoras haya quedado para nosotros como una figura tan oscura es debido en parte a la pérdida de documentos de la época, porque sabemos que en la antigüedad se escribieron varias biografías de Pitágoras, incluida una por Aristóteles, pero todas ellas se han perdido. Otra dificultad además para identificar claramente la figura de Pitágoras radica en el hecho de que la orden fundada por él era de un tipo comunal y secreto; tanto los conocimientos como las propiedades eran mantenidos en régimen de comunidad, y por lo tanto no se podía atribuir un descubrimiento a ningún miembro concreto de la escuela. Lo mejor es, pues, no hablar de la obra de Pitágoras, sino más bien de las contribuciones de los pitagóricos, aunque en la antigüedad se solían atribuir todas ellas al maestro” (Boyer, 1969: 78).

Según la cantidad de puntos considerados, podían obtenerse diferentes configuraciones: además de triangulares y cuadradas, existían *pentagonales*, *hexagonales*, etcétera. Esas disposiciones particulares son actualmente conocidas como *números figurados*.

La numeración decimal de posición que usamos actualmente fue inventada en India, en los primeros siglos de nuestra era; los árabes la difundieron por Europa en el siglo X. Los algoritmos se hicieron más accesibles y, entonces, mayor número de personas pudo acceder a ellos. Además, al aumentar la capacidad de cálculo, se produjo en ese período un importante desarrollo de los conocimientos en aritmética.

Con este rastreo histórico intentamos mostrar cuáles son los supuestos orígenes del número natural —como herramientas para resolver problemas de conteo— y cómo se construyó laboriosamente el sistema de escritura actualmente usado. A veces, en las prácticas de enseñanza, la noción de número natural se restringe peligrosamente a la forma de representación escrita; distinguirlas nos parece muy importante y consideramos que un indicio de tal distinción lo encontramos en la trayectoria de construcción de las nociones. En uno de los tramos de esa trayectoria, los números naturales fueron objeto de estudio de los matemáticos; luego, en el apartado 3, presentaremos algunas aristas de ese objeto.

2.2. Aspectos cardinal y ordinal del número natural

Cuando se tratan los números naturales en textos universitarios de matemática, por ejemplo en libros de cálculo, se estudian las propiedades básicas de ese conjunto que permiten distinguirlo de otros. La génesis del concepto de número natural y sus fundamentaciones matemáticas son objeto de estudio de cursos relativos a fundamentos o historia de la matemática.

Por influencia de la reforma llamada de la “matemática moderna”, en los programas escolares franceses de 1970⁷ aparece en el primer año de escolaridad la *noción de número natural*. Particularmente para el Nivel Inicial, los comentarios que acompañan a esa reforma aluden a la importancia

7. La influencia que tuvieron esas decisiones del Ministerio de Educación francés en los programas escolares de la Argentina fue directa.

de realizar actividades de clasificación, ordenamiento⁸ y correspondencia uno a uno.

Esas actividades de clasificación y orden sugeridas en el Nivel Inicial, son el resultado de una transposición directa de diversos estudios matemáticos sobre el número natural. Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1952) afirman:

Los números *naturales* 1, 2, 3, ... aparecen al *contar* los objetos de un conjunto. Al efectuar la operación de contar, establecemos implícitamente una *ordenación* entre los elementos del conjunto, y al último contado se le llama *número ordinal* del conjunto. El número natural, como símbolo ordinal, resulta pues de abstraer la naturaleza de los objetos, teniendo en cuenta solamente el orden en que se presentan a nuestra consideración. En cambio, el número como símbolo *cardinal* representa un conjunto, abstrayendo la naturaleza de los elementos que lo componen y el orden en que éstos se consideran: corresponde al atributo común que tienen todos los conjuntos tales que sea posible establecer entre cada par de ellos una correspondencia biunívoca entre sus elementos.

Es importante señalar que si bien aparecen rastros de los números como herramientas en restos arqueológicos que datan de 30.000 años, los autores que trataron esta noción como objeto de conocimiento matemático pertenecen a los siglos XIX y XX: Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943), Cantor (1845-1918), Frege (1848-1925), Russell (1872-1970), Kronecker (1823-1891).

La distinción entre número ordinal y cardinal es un aspecto constitutivo del concepto de número natural, y se incluye o no en la enseñanza según los vaivenes que sufren los programas escolares. Precisamente la crítica de Freudenthal que citamos en la introducción de este artículo se refiere a la enseñanza del aspecto cardinal del número (clases de conjuntos equivalentes por biyecciones, etcétera) en los primeros años de escolaridad. El cuestionamiento apunta al hecho de que se tomen esos aspectos constitutivos como objetos de enseñanza. Como ya lo dijimos, las tendencias actua-

8. Cuando hablamos de actividades de ordenamiento nos referimos a la identificación del lugar (por ejemplo: es el cuarto objeto de una colección), es decir, al aspecto ordinal constitutivo de la noción de número.

les proponen crear en el ámbito escolar experiencias donde la cuantificación ocupe un lugar de importancia y abarque una amplia gama de nociones —recuperadas a través del estudio del recorrido histórico— que no necesariamente incluyen la escritura de los números. La lectura y escritura de los números que en la enseñanza tiene un espacio central —como veremos en el apartado 4— es un aspecto de gran importancia para el estudio de los números naturales, aunque no el único.

Hasta aquí mostramos una caracterización de los números naturales en relación con el conteo, y los distinguimos del proceso de su escritura. Contar es una actividad trivial en hechos de la vida cotidiana (¿cuántos vendrán?, ¿cuántos faltan?, ¿cuántos sobran?), en juegos infantiles y aun en las interacciones entre adultos y niños (los niños juegan a decir números, el abuelo le enseña a contar al nieto, etcétera). Esas mismas actividades se reproducen en la escuela, se naturalizan, y pocas veces se considera al conteo como objeto de enseñanza. En esas rutinas resulta extraño preguntarse: ¿hay algo para enseñar en torno al conteo? La respuesta es obvia: ¡hay que enseñar a contar! Y ello se lleva a cabo a través de cantos, juegos, en la organización del trabajo, con la lectura del calendario, etcétera. Y efectivamente se practican ciertas rutinas involucradas en la acción de contar, pero ¿alcanzan esas actividades para usar los números en la resolución de problemas? Nuestra conjetura es que no alcanza, y trataremos de justificarla cuestionando algunos aspectos del conteo dentro y fuera del contexto escolar.

3. EL PROBLEMA DE CONTAR

“¿Cuántos hay?” es la pregunta que conduce a la acción de contar.

Un instante de reflexión permite considerar que la formulación de una respuesta correcta y las actividades involucradas en el conteo dependen del contexto en el cual se plantea ese interrogante.

Contar los elementos de una colección supone distinguir a la colección como tal, y tener la idea de elemento. Esta idea de elemento se relaciona con la de *unidad*, la cual nace cuando el sujeto puede *distinguir* o individualizar un objeto del resto de lo que lo rodea, prescindiendo de todas las cualidades que no son pertinentes al problema. La idea de uni-

dad lleva implícita, por oposición, la idea de *pluralidad* o *conjunto* de elementos.⁹

La respuesta a “¿cuántos hay?” en una colección que tenemos ante nuestros ojos puede significar realizar acciones triviales o no, dependiendo del contexto y del resolutor. Para un niño, contar la cantidad de fichas que hay en una caja puede ser un problema si la cantidad es poco razonable para sus conocimientos acerca de los números. Diríamos en ese caso que “todavía no sabe” contar o “no sabe contar hasta tanto”.

Pero hay otros problemas frente a los cuales incluso quien “sabe” contar se encuentra con dificultades. Por ejemplo: determinar el número de participantes de una manifestación. Es bien conocido en los medios periodísticos las considerables diferencias con que se presentan los datos —aunque las variaciones en las cifras no solamente se deben a dificultades matemáticas—. Por ejemplo, al difundir información sobre la cantidad de manifestantes, distintas agencias de noticias indicaban que en “la última marcha por la dignidad de los pueblos indígenas” —llevada adelante por el ejército zapatista y convocada en la plaza del Zócalo, México, D.F.— había más de 100.000 personas.¹⁰ Sin embargo, para el mismo suceso, la policía del Distrito Federal informaba por televisión que calculaban alrededor de 50.000 personas presentes.

¿Cómo se aborda el problema de determinar el número de personas presentes en un espacio público? Brevemente, se trata de hacer modelos que representen la distribución de las personas en la zona considerada. El resultado es una estimación de la cantidad.

Problemas de ese tipo no son tratados habitualmente en el contexto escolar, pero creemos necesario plantearlos —sin la ambición de hacer un rastreo exhaustivo— para ampliar el panorama de los problemas que surgen cuando se intenta responder a la pregunta “¿cuántos hay?”.

9. Estas ideas de unidad y conjunto son *primitivas*, es decir, no reducibles a otras más simples, y tienen valor puramente relativo, ya que toda unidad es, a su vez, un conjunto de otros elementos que la componen, y todo conjunto puede considerarse a su vez como una nueva unidad, pudiéndose formar con estas unidades compuestas (también llamadas de *orden superior*) nuevos conjuntos, y así sucesivamente. Podemos ilustrar esto con las diferentes unidades del sistema posicional de numeración: una *centena*, es una *pluralidad* de decenas y también de unidades; una *unidad de mil*, se puede ver como una pluralidad de centenas, decenas, unidades, medias decenas, cuartos de centenas, y cualquier otra unidad que consideremos.

10. *Lá voz del interior* del 12/03/01, periódico de la ciudad de Córdoba, Argentina.

En el ejemplo que acabamos de presentar suponemos que los elementos de la colección están fijos –aun los manifestantes, ya que son considerados en un momento determinado del acto–. Pero pensemos en un conjunto donde sus elementos se desplazan en diferentes direcciones, por ejemplo –en un orden de magnitud mucho menor al de la manifestación– contar los niños y niñas que juegan en el patio (vestidos con delantal) o determinar el número de pollitos bebé que se desplazan en un corralito. En casos como éstos, dar una respuesta se torna aún más complicado, y según las colecciones habría que instrumentar un modo de distinguir un elemento de otro diferente y, fundamentalmente, distinguir cuáles fueron ya contados y cuáles falta elegir hasta recorrer todos los elementos y reconocer que se llegó a nombrar el último.

En cualquiera de esos problemas, podemos considerar que la colección está, de alguna manera, “a la vista” del observador, frente a él. En el caso de que el resolutor esté de alguna forma incluido en la colección, el problema de responder la pregunta “¿cuántos hay?” no presenta las mismas dificultades. Pensemos, por ejemplo, en contar los árboles de una plaza que tienen un tronco que la maestra no puede rodear con sus brazos.¹¹ O, en otro orden de magnitud, cuántos árboles de cierta especie en extinción hay en una región determinada.

En contextos escolares, las colecciones a contar tienen una cantidad moderada de elementos, pueden ser abarcados con la mirada de quien tiene que realizar la acción, y los elementos no se desplazan por sí mismos (generalmente son objetos concretos o dibujos). Bajo esas condiciones, Briand (1993) distingue una serie de pasos –en un proceso cíclico– que el sujeto necesariamente debe cumplimentar para responder cuántos hay:

1. *Ser capaz de distinguir un elemento de otro.* Esto puede parecer obvio, pero hace a la noción de unidad: ¿cuándo atribuimos el uno?¹² Además,

11. La característica de “un tronco que la maestra no pueda rodear con sus brazos” es una forma de determinar cuáles son los árboles que pertenecen a la colección a contar.

12. En una experiencia realizada con niños de 6 a 10 años (Fregona, 1989), se les planteó el problema: ¿cuántos porotos hay en un kilo? Además del kilogramo de porotos, los niños tenían a su disposición tazas de diferentes tamaños, una balanza, lápiz y papel. El conteo era la estrategia para abordar el problema, y la unidad era un poroto. Cuando se encontraron con los porotos partidos, empezaron los problemas: ¿cómo se cuentan? ¿Cada pedacito es una unidad? ¿O cierta cantidad de pedacitos –más o menos equivalente al volumen de un poroto entero– hace una unidad?

al continuar el conteo, distinguir un elemento de otro es indispensable para poder reconocer cuáles son los elementos “ya contados”.

2. *Elegir un primer elemento de la colección.* Al tomar un elemento se comienza a atribuir un orden cualquiera a la colección ya que ese elemento se elige como el primero.¹³ A veces lleva cierto tiempo darse cuenta de que independientemente del orden que se siga, la cantidad de elementos de la colección no varía. De alguna manera se aísla ese elemento (se lo separa o señala, se lo ubica espacialmente) y se comienza a armar una subcolección: la de los elementos “ya contados”.
3. *Enunciar la primera palabra-número (uno).* El elemento elegido es el primero, y por ello le corresponde el nombre “uno”.
4. *Determinar un sucesor en el conjunto de los elementos aún no elegidos.* Elegir un elemento entre los “no contados” –es decir, determinar un sucesor– lleva a recomenzar con la atribución de un orden entre los elementos que aún no fueron contados y a distinguir ese elemento del resto.
5. *Atribuir una palabra-número (sucesor del precedente en la serie de palabras-número).* Al incorporar ese elemento a la subcolección de los “ya contados”, se enuncia el nombre del número que corresponda. Ese nombre es el número ordinal de la colección de los “ya contados”. También en este paso hay errores difíciles de sobrepasar: el nombre que se enuncia no es del objeto, sino de la cantidad de objetos contados.
6. *Conservar la memoria de las elecciones precedentes.* Es decir, recordar qué elementos se contaron y qué palabra-número es la última enunciada.
7. *Recomenzar los pasos 4 y 5 sincronizándolos.* Este paso indica que se repite un ciclo. Supongamos que los elementos “ya contados” son n (siete, por ejemplo), y todavía quedan elementos de la colección inicialmente dada. Entre esos elementos “no contados” elegimos uno –que pasará

13. El proceso de ordenar la colección se continuará, de acuerdo con un desarrollo cíclico, con la elección de un segundo elemento, de un tercero, y así sucesivamente hasta agotar la colección de partida.

a engrosar la subcolección de los “ya contados”– y enunciamos la palabra-número *siguiente de n* (en nuestro ejemplo, ocho). En este punto, cuando el sujeto no domina el nombre de los números en el orden de la sucesión convencional aparecen repeticiones de nombres o lagunas que conducen a error.¹⁴

8. *Saber que se eligió el último elemento.* El orden que hizo posible distinguir un primer elemento y luego los sucesores (de uno en uno, según lo indica el paso 4) nos permite ahora reconocer que llegamos a la última unidad. Es decir, una vez que contamos ese (último) elemento, la subcolección de los “ya contados” es la colección inicialmente dada.
9. *Enunciar la última palabra-número.* Este paso es el ya conocido de atribuir una palabra-número (paso 5), sólo que aquí, por ser la última enunciada, indica la cantidad de elementos de la colección inicial. Si bien este número es la respuesta a “¿cuántos hay?”, esto no es para nada evidente cuando se está en curso del proceso de aprendizaje. Es común escuchar a los sujetos repetir la sucesión de palabras-número desde “uno” hasta esa palabra final, sin comprender que esa palabra final da el número de elementos de toda la colección. Tal vez podríamos sugerir a Briand modificar el nombre de este paso, o crear un décimo paso, para incluir en el proceso el reconocimiento de que la última palabra-número responde, precisamente, a “¿cuántos hay?”.

Estos pasos parecen insustanciales, en particular si uno “sabe contar”, ¿por qué entonces consideramos importante distinguirlos? Al menos por dos razones: porque se encuentran en ellos la mayoría de los errores que habitualmente producen los sujetos cuando empiezan con las actividades de conteo y, además, porque son conocimientos –entre otros, tales como ciertas nociones espaciales– que la escuela no enseña pero que sin embargo exige, ya sea como conocimientos con valor en sí mismos o como requisito para otros aprendizajes escolares.

Estamos ahora en condiciones de analizar, con herramientas provistas por la didáctica de la matemática, los conocimientos involucrados en los

14. Nos referimos a errores del tipo “cuatro, cinco, ocho, nueve” o bien “cinco, seis, siete, cuatro, cinco”.

contenidos designados como número natural, sistema de escritura y conteo. Discutiremos a continuación, a la luz de dichas herramientas, algunas actividades que se realizan habitualmente en las aulas y otras que podrían enriquecer ese conjunto de prácticas escolares.

4. DIFERENTES ASPECTOS DEL NÚMERO Y DEL CONTEO EN LA ENSEÑANZA

Algunas prácticas habituales que se realizan en el Nivel Inicial en torno al uso de los números apuntan a recuperar los conocimientos que los alumnos ya tienen. Asimismo, cuando el docente enseña un tema y organiza previamente una secuencia de actividades que adecua después según el desarrollo en la clase, busca crear condiciones para que el alumno se encuentre con los diferentes aspectos de ese tema. A pesar de la importancia de tener en cuenta ambos aspectos –los conocimientos previos de los alumnos y la organización del conocimiento– a menudo el conjunto de actividades que se proponen parecen responder más a experiencias aisladas que a una organización conforme a una secuencia de enseñanza del tema.

Enseñar los números y “saber los números” en el Nivel Inicial y en el primer ciclo de la EGB puede abarcar diferentes aspectos y distintas prácticas con las colecciones, algunas de las cuales tratamos en los apartados anteriores: enumerar, establecer correspondencias uno a uno, nombrar y escribir los números, etcétera. Sin la pretensión de ser exhaustivos, consideremos los siguientes aspectos involucrados en el tema “números naturales” en el Nivel Inicial o en el primer ciclo de la EGB.¹⁵

- a) Comparar colecciones y ordenarlas (por ejemplo, dadas cuatro colecciones, poder decir cuál tiene más y sucesivamente cuáles siguen según el número de elementos).
- b) Agrupar colecciones que tienen la misma cantidad.
- c) Recitar la lista de nombres de los números.
- d) Nombrar el número de elementos de un conjunto y escribir ese número.

15. El análisis de las condiciones con las cuales pueden organizarse cada uno de esos conocimientos es muy interesante, pero no es objeto de este capítulo.

- e) Dado un número escrito, distinguir una colección que tenga esa cantidad de elementos.
- f) Leer y escribir números.
- g) Comparar y ordenar números.
- h) Usar los números para resolver situaciones (básicamente a través del conteo).

El ítem (a) propone "comparar y ordenar colecciones"; según la organización de la actividad y de los conocimientos de que dispongan los alumnos, una estrategia de base¹⁶ es la correspondencia uno a uno, y ése podría ser el sentido que tiene en la nómina dada. Pero si los sujetos saben contar, pueden usar los números para determinar qué colección tiene más, y entonces lo que comparan y ordenan son números (ítems d y g).

La escritura del número de elementos de un conjunto, cuando se proponen colecciones bastante grandes, necesariamente lleva a ampliar los conocimientos en juego para incluir agrupamientos (regulares o no), escrituras aditivas y multiplicativas,¹⁷ sistema de numeración decimal.

Explícitamente, en la lista aparece el conteo para resolver situaciones (ítem h), y eso es objeto del apartado 5 de este capítulo. Veremos allí que las condiciones creadas por la organización de las actividades presentadas favorece el encuentro de los alumnos con los números de un modo que recupera —de acuerdo con la teoría de las situaciones didácticas— el sentido de los números naturales como "los que sirven para contar".

16. Se denomina "estrategia de base" a aquella con la cual, según el estudio a priori de la situación, los sujetos pueden abordar el problema. En el caso de comparar colecciones, la estrategia de base es la correspondencia uno a uno. Dicha estrategia puede aparecer o no —de allí el potencial— según la organización de la actividad y el conocimiento de los destinatarios. En el caso de que el número de elementos de la colección sea "grande" en relación con los conocimientos de los sujetos, la estrategia puede ser agrupar los elementos de cada colección (por ejemplo, de a tres) y luego establecer correspondencia uno a uno entre esos grupos. Vemos cómo el cardinal de la colección opera como variable didáctica en la actividad propuesta.

17. No estamos pensando en la simbolización de las operaciones, sino en ciertas respuestas que dan los alumnos que disponen, por ejemplo, de los números hasta el 8, y describen una colección de 20 elementos como: "Hay 8 y 4 y 5 y 3", o bien, "Hay: 6 y 6 y 6 y 2 más", o "Hay tres veces 6 y 2 más".

Estas observaciones nos permiten ilustrar que en esa nómina no hay una división tajante entre un conocimiento y otro, la presentamos de ese modo a los fines de exponer las ideas y favorecer el análisis de las decisiones que se toman en el aula.

La planificación de un tema incluye necesariamente actividades —en las cuales a veces se distinguen ejercicios, juegos, problemas— que provienen de tradicionales prácticas escolares o de materiales bibliográficos vigentes. Para el docente, lo fundamental de la planificación es preparar "qué hacer" con los alumnos en relación con tal tema a enseñar, pero ni las tradiciones ni los textos explican qué aspecto de ese tema se está poniendo de relieve con tal tarea y con tal consigna.

4.1. Discusión de algunas actividades usuales

Con las herramientas que contamos —los números para contar, los "pasos" de Briand, algunos elementos de la teoría de situaciones, la lista de conocimientos involucrados en la enseñanza del número— y a modo de ejemplo, vamos a discutir brevemente algunas actividades de diferentes tipos que usualmente se realizan en el Nivel Inicial o el primer año de la EGB relativas al concepto de número. La idea es hilar más finamente las relaciones entre las actividades propuestas y los conocimientos matemáticos necesarios o no para su resolución, es decir analizar cuáles son los conocimientos que efectivamente se ponen en juego en las condiciones organizadas por el docente o el autor del texto en el caso de actividades extraídas de libros de matemática.

La clase está organizada en grupos. En cada uno de ellos y en forma rotativa, uno de los miembros funciona como secretario: es el encargado de buscar los materiales para sus compañeros, llevarlos de vuelta al lugar que les corresponde, etcétera. Supongamos que la consigna que formula el maestro es: "El secretario va a distribuir a cada uno de sus compañeros una hoja de papel".

La tarea es clara, no hay condiciones explicitadas, por lo cual se puede llevar a cabo con diversas estrategias. Un niño toma de la pila algunas hojas y las distribuye, vuelve a la pila a devolver las que le sobraron o a bus-

car otras si no le alcanzaron. ¿Hay una experiencia numérica? Ese sujeto no usa los números, el conocimiento sobre el que reposa la estrategia de resolución es fundamentalmente la correspondencia uno a uno en una condición espacial particular.¹⁸

La correspondencia uno a uno es un conocimiento matemáticamente muy importante, constitutivo del número, y vale la pena crear oportunidades de usarlo. Está también presente en algunos de los "pasos" del conteo, por ejemplo, cuando se asigna a cada objeto una palabra-número, o cuando elegimos el último elemento y enunciamos la palabra-número que le corresponde. Pero establecer correctamente una correspondencia uno a uno no implica saber contar. Veamos otro ejemplo de características similares.

Cada niño dispone de una hoja sobre la cual hay dibujados algunos muñecos, y cada grupo tiene una caja de botones de distintos colores. La consigna es: "Eliján botones negros para ponerle una nariz a cada muñeco".

Estamos otra vez ante una actividad de correspondencia, ya que para resolverla sólo basta con elegir un botón negro y colocárselo a un muñeco y repetir este paso hasta que cada muñeco tenga su nariz. Esta actividad, como la de las hojas, no ofrece condiciones o restricciones como para que sea necesario usar los números para dar una solución.

En los ejemplos anteriores vimos que aun cuando esas actividades están clasificadas como "para contar", se resuelven sin recurrir a los números. Otras veces, bajo el mismo título, algunas actividades hacen intervenir competencias fundadas principalmente en la percepción. Es frecuente encontrar en los libros destinados a la sala de 5 años actividades que describimos a continuación (Mainé y Morenza, 1999: 19 y 26).

Hay tres árboles a cada lado de un camino con diferentes cantidades de frutas (aproximadamente todas del mismo tamaño). En uno de los lados del camino hay tres árboles con 2, 5 y 2 frutas respectivamente; en el otro lado también hay tres árboles, con 5, 7 y 3 frutas cada uno.

18. Este contexto es claramente diferente de aquel en el cual se trata la correspondencia uno a uno sobre una hoja de papel, donde, por ejemplo, a una colección de animales le corresponde en otra columna su alimento "preferido".

La única consigna relacionada con la actividad matemática es: "En cada lado del camino marcá con una x el árbol que tiene más frutas".

O bien se muestran dibujos, por ejemplo, de caminos de hormigas con diferentes cantidades en cada uno. La diferencia de cantidades de hormigas debe ser notoria (8, 6, 4); la consigna es: "Pintá el túnel del hormiguero que tiene menos hormigas".

En estas dos actividades, a un niño de 5 años con cierta experiencia sólo le basta con detener unos segundos la mirada para responder correctamente, sin invertir en la solución la comparación de colecciones con el recurso de la correspondencia, o de números. Como ya vimos, dichas comparaciones son aspectos constitutivos del número, pero hay que crear las condiciones favorables para que surjan.

En el Nivel Inicial, las expresiones "más" y "menos" aparecen ligadas a la comparación de colecciones.¹⁹ Tal como lo señalamos en el apartado 3, contar los elementos de una colección supone distinguir a la colección como tal, y tener la idea de elemento, es decir que es fundamental poder distinguir una unidad de una pluralidad. Estas ideas –unidad, pluralidad– están tal vez subyacentes en ese contenido escolar mal llamado "cuantificadores" y que hace referencia a "uno-mucho-poco". Nos parece importante señalar que "mucho" o "poco" suele relacionarse en las prácticas escolares con el espacio ocupado y no necesariamente con la cantidad –los autores de manuales tratan de evitar esta confusión presentando todos los objetos de las colecciones a comparar en el mismo tamaño–. Esas nociones son relativas ya que hay mucho o poco en relación con algún patrón que generalmente está dado por la experiencia cotidiana o el sentido común, y si se quieren relacionar con el número, entonces habría que cuantificarlas y responder a cuántos más o cuántos menos.

Los contextos de la vida cotidiana –la fecha, los niños ausentes, los días que faltan para el cumpleaños de un compañero, un turno de juego, la organización del trabajo en grupos, el número de escalones en un edificio o los bancos de un parque– son oportunidades que los docentes aprovechan para recuperar el conteo. Generalmente, esas actividades se realizan en grupos o con toda la clase y es el docente quien decide qué contar, distingue uno por

19. En la EGB, "más" y "menos" se asocian con las operaciones de suma y resta.

uno los elementos, establece el orden (el primero, el o los sucesor[es], el último), conserva la memoria de las elecciones precedentes, etcétera, y los alumnos, a coro, enuncian la palabra-número que corresponde. En esos casos, de todos los pasos expuestos por Briand, uno queda a cargo de los alumnos y grupalmente. No juzgamos si la actividad es buena o mala, solamente intentamos distinguir cuáles son las decisiones del docente y de los alumnos para inferir las posibilidades de aprendizaje —a través de la acción o de la imitación— bajo tales condiciones.

Así, casi siempre es el docente quien decide qué contar y, por razones de economía en las prácticas, toma elementos que están a mano, es decir, el universo desde el cual se determina la colección es un conjunto que está ahí y se considera conocido por todos. Toma, por ejemplo, como universo las personas presentes en el aula o los alumnos de la clase, y da la siguiente consigna: "Vamos a contar los chicos rubios de la clase". Obviamente, espera que la respuesta sea única.

Al dar ese criterio, seguramente el docente tiene claro cuáles son los elementos que están caracterizados por esa propiedad. Pero hay ambigüedades en el lenguaje: ¿"chicos" son alumnos o alumnos varones? ¿Cómo se caracteriza el ser "rubio"? Evidentemente hay un sujeto que es "menos" rubio que otro, ¿lo incluimos en la colección de los "chicos rubios" o no? Ante la duda, el docente puede decidir quiénes son los sujetos que cumplen con la propiedad enunciada, tiene autoridad para hacerlo, pero entonces la actividad ya no es la misma porque para el alumno la interpretación de la consigna —¿qué hay que contar?— queda bajo la responsabilidad de otro. Y es legítimo entonces que se pregunte: ¿cuándo empieza lo que yo tengo que hacer? Es decir, no está claro en la interacción cuándo el alumno se compromete con la resolución del problema planteado. Se crea un espacio de incertidumbre en el cual se corre el riesgo de que el alumno "espere" a ver qué tiene que hacer, y su respuesta no esté elaborada en función del problema sino de lo que "quiere" el docente.²⁰

En síntesis, en las actividades de conteo, es fundamental que cada niño pueda distinguir con claridad cuál es el criterio con el cual se determina la colección a contar. De ese modo los alumnos pueden asumir como propia la tarea y comenzar a resolverla.

20. Éste es un problema fundamental de la enseñanza, y ha sido objeto de numerosos estudios en didáctica de la matemática.

Ante los límites que muestran las actividades propuestas, miradas a la luz de algunas herramientas teóricas, habrá docentes que se pregunten, ¿qué hacer?, ¿se puede enseñar a contar?, ¿es posible enseñar los números naturales para resolver problemas? La respuesta es sí, aunque cabe aclarar que cualquier propuesta de enseñanza tiene límites, de lo contrario ya estarían resueltos los problemas de difusión de los conocimientos. En este apartado nuestra intención ha sido tratar de identificar dichos límites, es decir, distinguir el alcance de las diferentes propuestas para no albergar falsas expectativas acerca de los resultados de nuestra tarea como docentes.

Un modo de enseñar a contar, teniendo en cuenta los "pasos" que distingue Briand, podría ser a través de actividades con diferentes tipos de colecciones, de manera tal que, según sus características, alguno de esos pasos adquiera un relieve particular y, en consecuencia, sea *necesario* un conocimiento para recuperar el control y resolver el problema.

Por ejemplo, si uno piensa en una colección de objetos estáticos que pueden ser desplazados (como una colección de una docena de fichas en una caja), pasan inadvertidos los pasos relativos a distinguir los elementos y guardar en la memoria las elecciones precedentes (pasos 1 y 6 respectivamente) porque es suficiente con el gesto de tomar cada objeto y separarlo de la colección: el paso 1 pasa inadvertido porque se cuenta con una colección definida sin ambigüedades y está la posibilidad de separar un elemento para distinguirlo de otros; el paso 6 también pasa desapercibido porque todas las elecciones precedentes (1, 2, 3, etcétera), mediante el mismo procedimiento, quedarán físicamente separadas de la colección inicial. En la organización de ese conteo sí es necesario el orden, guardar en la memoria la última palabra-número enunciada y el nombre de los números.

Pero si la colección está dada, por ejemplo, en la pantalla de un monitor, donde los "objetos" se pueden tocar con un lápiz óptico pero no quedan marcados ni pueden ser desplazados de a uno, la situación es diferente. Los sujetos quieren responder correctamente a "¿cuántos hay?", pero en este caso hay allí una condición que ofrece resistencia al avance de los sujetos: hay que aprender a distinguir elementos que son diferentes (paso 1), elegir un primer elemento y los sucesores (pasos 2 y 4), conservar en la memoria las elecciones precedentes (paso 6) y reconocer que se eligió el último elemento (paso 8). Cualquier tropiezo en alguno de esos pasos puede conducir a dar una respuesta incorrecta, pero también es posible que conduzca a la

respuesta correcta por compensación de errores (por ejemplo, contar dos veces un mismo elemento y a la vez omitir algún otro).

Briand señala que muchas de las acciones de los alumnos –tales como la falta de coordinación entre el movimiento de señalar o separar un elemento y enunciar la palabra-número que le corresponde, o la indecisión para determinar un suceso– no pueden ser detectadas por el docente en situaciones de clase. Si ocasionalmente, por la organización del grupo, el docente distingue alguna dificultad en un alumno, es difícil pensar en una intervención que le permita buscar alguna nueva estrategia para modificar su manera de contar. Generalmente, el alumno solamente corrige la acción y ese error queda como un “accidente de conteo”. Si el docente no alcanza a ver qué hace el alumno, la relación del alumno con el problema queda entonces librada a una posible interacción posterior con él o con sus compañeros, por eso decimos “el alumno solamente corrige la acción”.

Para enseñar a usar los números para resolver problemas, tomamos la propuesta de Brousseau, quien afirma que las situaciones de distribución son fundamentales para el uso de los números naturales. Se trata de recuperar a través de una situación artificial (con respecto a los supuestos orígenes de los números que presentamos al principio del capítulo) las condiciones en las cuales los números naturales son un conocimiento óptimo para resolver el problema según una organización determinada.

5. LOS NÚMEROS EN UN PROBLEMA DE DISTRIBUCIÓN

Como ya lo dijimos en la introducción de este artículo, en los problemas de distribución se trata de anticipar la cantidad de objetos necesarios para distribuir cierto número de ellos (uno, dos, tres cuatro...) a cierto número de destinatarios (puede variar desde un número menor que diez a, por ejemplo, veinticinco o treinta).

La distribución realmente no constituye un problema para los niños de 5 o 6 años cuando el número de destinatarios es menor que diez y, con los objetos disponibles, se trata de entregar un objeto a cada uno de ellos. Empieza a constituirse como problema si el número de objetos por destinatario aumenta (dos, tres, cuatro o cinco objetos), si los objetos están dispuestos en grupos cuyo número no coincide con lo que se da a cada destinatario (por ejemplo, las galletitas están disponibles en paquetes de cuatro, y se

debe dar tres galletitas a cada destinatario), si el número de destinatarios es bastante grande (por ejemplo veinticinco o treinta) y, fundamentalmente, si no se cuenta con los objetos para armar lo que le corresponde a cada uno sino que se trata de *anticipar* cuántos objetos de cada tipo se necesitarán.

Según el análisis realizado por Brousseau para crear las condiciones que hagan necesario el número mediante una actividad que esté al alcance de los niños, se debe establecer en la consigna que se trata de *buscar de una sola vez el número necesario y suficiente* de objetos.

El niño puede iniciarse en la acción sin importar cuáles sean sus conocimientos sobre los números. Puede llevarse a cabo en un contexto individual o también social, y permite al maestro organizar un gran número de problemas con dificultades progresivas que exigen siempre el uso de los números y que ofrecen a los niños diferentes oportunidades de profundizar y ampliar sus conocimientos.

Presentamos a continuación dos actividades (Brousseau, 1994; Brousseau y Foucaud, 1992, respectivamente) donde el problema es de distribución, pero en diferentes condiciones. En cada una de ellas analizaremos algunas de las decisiones tomadas por los autores que se constituyen en variables didácticas de las situaciones.

5.1. Actividad 1: vasitos y pinceles

El contexto

En un jardín de infantes, la docente coloca en una mesa vasos con pintura y en otra, bastante alejada de ella, unos pinceles. La tarea es buscar de una sola vez la cantidad necesaria y suficiente de pinceles para que cada vaso tenga un pincel. Si no se logra resolver el problema, hay que recoger todos los pinceles y comenzar otra vez.

La consigna

Para iniciar la actividad, la docente explicita la tarea del modo siguiente: “Hemos puesto pinturas en estos vasitos, uno de ustedes tendrá que ir a buscar pinceles y colocar uno en cada vaso. Pero debe traer todos los pin-

celes de una vez y hacer que no queden vasos sin pincel, ni pinceles sin vaso. Si no lo consigue, recoge todos los pinceles, vuelve al lugar en que están los pinceles y trata de nuevo".

Organización de la actividad

Las mesas están bastante alejadas para evitar el recurso de la correspondencia uno a uno. La cantidad de vasitos tiene que ser lo suficientemente grande como para no ser abarcada perceptivamente, pero que no supere el rango numérico del conteo del que dispone la clase. Supongamos que todos los niños saben contar (en el sentido de Briand) hasta 20 (aunque no necesariamente sepan escribir ese rango de números), entonces una buena cantidad es poner unos 18 vasitos.

¿Por qué de una sola vez? Para favorecer el uso del conteo. Si hay posibilidad de reajustes, por ejemplo un niño lleva pinceles y le faltan algunos, digamos tres, perceptivamente puede decidir cuántos buscar. Y si, por el contrario, le sobran pinceles, no necesita pensar en nada más que devolverlos a la mesa correspondiente.

La idea, para instalar la actividad como problema de la clase, es no elegir a un niño que suponemos que obtendrá rápidamente la solución. ¿La actividad se lleva a cabo siempre con el mismo niño? Se trata de un problema, de una actividad que ofrece resistencia, por lo cual es muy probable que un niño fracase en el primer intento; se debe prever darle dos o tres oportunidades más.

¿Pueden disponer los niños de algún otro material que les permita escribir? No, no pueden escribir —y para efectivizar la restricción simplemente no se brindan los medios para hacerlo—, ya que la posibilidad de hacerlo cambiaría radicalmente la actividad en términos de los conocimientos que intervienen.

Respuestas posibles

Esta actividad fue realizada en numerosas oportunidades y generalmente la respuesta correcta no es inmediata. Aun cuando pueda encontrarse un grupo de alumnos con un rico bagaje de experiencias numéricas, el conteo como conocimiento óptimo para resolver el problema es una construcción laboriosa.

Al principio, los niños piensan que es suficiente ir a buscar los pinceles, sin hacer algo previamente. Toman y traen un manojo de pinceles y los empiezan a distribuir y descubren que sobran o faltan (raramente, por azar, aciertan a la cantidad buscada); recogen todo, dejan los pinceles sobre la mesa y empiezan otra vez. Puede ser que los compañeros le sugieran que cuente, pero esto no los ayuda y tienen que recomenzar otra vez.

Veamos lo que sucede en uno de los casos descritos por Brousseau (1994). Un niño va y busca un manojo de pinceles, empieza a distribuir un pincel en cada vaso y expresa: "¡Ah! Me quedan tres". Los compañeros empiezan a sugerirle: "Contá, contá...". El niño cuenta los vasos, va a la mesa de los pinceles, toma un manojo, y vuelve a distribuir los pinceles en cada vaso, pero con el mismo riesgo: pueden sobrar o faltar pinceles. Recoge todos los pinceles y vuelve a la mesa correspondiente, sus compañeros le sugieren: "Contá los pinceles". Y así lo hace, pero luego recoge un montón, o sea que el contar los pinceles no le ayuda a decidir cuántos debe llevar para cumplir la tarea...

En distintos grupos se observa que aun cuando en el transcurso de la actividad cambiaba el resolutor, el proceso no se alteraba.

El conocimiento en juego

Es el conteo, pero ¿qué es lo que hay que contar? A pesar de las sugerencias que dan los compañeros, el resolutor no puede dar con la solución. El conteo forma parte del bagaje de conocimientos del niño y está disponible como saber cultural habitual, pero no en el uso que exige la actividad. Si, como en las actividades que vimos en el apartado 4, fuese el docente quien decide qué contar, seguramente el alumno daría la respuesta correcta pero no por su propia iniciativa, y ello pondría en cuestión el éxito del aprendizaje.

La actividad no termina cuando el niño acierta con el procedimiento esperado y puede distribuir un pincel en cada vasito de una sola vez. Después, se puede repetir la distribución con otras cantidades y ejercitar el uso de los números; en una de esas oportunidades, la maestra o alguno de los compañeros puede hacer "desaparecer" un vasito mientras el resolutor está buscando los pinceles. Si no hay errores, el niño encontrará que le sobra un pincel, y se espera que reaccione diciendo: "¡Me hicieron trampa!". Esto marcaría la confianza que tiene en su propio hacer y en el co-

nocimiento en juego, y sería una señal del tipo de relación que tiene con ese conocimiento.

Identificación de variables didácticas

Resulta conveniente aquí retomar la noción de variable didáctica introducida en el apartado 1, aunque parezca una digresión y nos apartemos por un momento del relato sobre las actividades de distribución. Es que justamente la identificación de las variables didácticas permite reflexionar sobre los objetivos propuestos y las condiciones creadas para lograrlos.

La noción de variable didáctica, surgida en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, fue definida a comienzos de la década de 1980, y redefinida más tarde por diferentes autores, entre ellos el mismo Brousseau.

Como ya lo dijimos al inicio de este capítulo, las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden variar a voluntad del docente y constituyen una variable didáctica cuando, según los valores que toman, modifican las estrategias de resolución y, en consecuencia, el conocimiento necesario para resolver la situación. Como explica Brousseau (1995):

[El docente] puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.

Por ejemplo, en la actividad de los vasitos y pinceles, la cantidad de vasitos es una variable didáctica. Si el alumno puede determinar el número a simple vista, utiliza un conocimiento diferente —aunque sea cierto “conteo”, ya que ese tipo de reconocimiento perceptivo de una cantidad permite a algunos estudiosos afirmar, por ejemplo, que ciertos monos “cuentan” hasta cuatro— que si se le presenta una cantidad bastante mayor aunque razonable para sus saberes sobre los números.

Otra variable didáctica en esa actividad es la *prohibición* —implícita porque no se les brindan los materiales adecuados— de escribir. La disponibilidad de lápiz y papel podría llevar a los niños a representar de alguna manera los vasitos, por ejemplo dibujándolos, y buscar entonces de una sola vez la cantidad de pinceles necesarios haciendo simplemente una enumeración (en el sentido antes señalado de correspondencia uno a uno) sin utilizar los números.

Una tercera variable es la *condición* de traer todos los pinceles necesarios “de una sola vez”; de ese modo los niños deben considerar la colección completa y para cada elemento traer un único objeto. Se evita de este modo el ajuste: “¡Ah! Me sobran tres pinceles” o “Me faltan dos pinceles”.

No siempre las variables didácticas se refieren a objetos físicos. Por ejemplo, el *tiempo* asignado para hacer una tarea puede constituirse en variable didáctica en la medida en que exija una estrategia de resolución que implique conocimientos nuevos. El ejemplo que damos a continuación no es pertinente para el Nivel Inicial o el primer ciclo de la EGB; sin embargo, lo presentamos para ilustrar nuestra afirmación. Se les pide a alumnos de 5° o 6° año de la EGB que, en treinta segundos, digan entre qué números naturales consecutivos se encuentra el resultado de la suma $3/2 + 2 + 17/3$. En ese lapso de tiempo no alcanzan a resolver la cuenta con lápiz y papel: precisamente, lo que se busca es que ante la imposibilidad de hacer la cuenta, elaboren estrategias de aproximación y encuadramiento con números racionales.

Tal vez sea necesario advertir que no cualquier modificación en el conjunto de condiciones creadas constituye una variable didáctica. Así, volviendo a la actividad de los vasitos y pinceles, si se toma por una parte una colección de cucharas y por otra parte platos, y se conserva la organización de la actividad, esa variación no constituye una variable didáctica. Seguramente habrá comportamientos diferentes —relativos a la manipulación de platos y cucharas en lugar de los pinceles—, pero eso no implica la necesidad de hacer intervenir conocimientos matemáticos diferentes para resolver la tarea asignada.

5.2. Actividad 2: preparación de la merienda

Veamos cómo el uso de variables didácticas puede engendrar, como lo afirma Brousseau, un “banco de problemas correspondiente a un mismo

conocimiento". En este capítulo, el conocimiento que está en juego es el uso de los números naturales en problemas de distribución, y proponemos ahora una nueva actividad (o colección de actividades) donde se usan los números para preparar las bolsitas de una merienda para los alumnos de la clase.²¹

El contexto

El contexto podría ser preparar la bolsita de la merienda para cada uno de los alumnos de la sala de modo tal que contenga algunos comestibles y una servilleta. La regla de juego es la misma que en la actividad anterior: se trata de *buscar de una sola vez el número necesario y suficiente* de objetos.

En un primer momento, digamos a fines del Nivel Inicial o a principios de primer año de la EGB, los comestibles podrían estar "sueltos", es decir, por unidad: una caja grande con caramelos, otra con nueces, otra con chocolatines, otra con servilletas. Hay que buscar de una sola vez cada tipo de objeto, para poner *un ejemplar de cada tipo en cada bolsita*.

Más adelante, se podrían presentar los objetos agrupados —tal como se encuentran en los negocios— de modo tal que *correspondan exactamente* a lo que le toca a cada destinatario. Por ejemplo, si las galletitas rellenas vienen en un paquete de cuatro, la consigna es poner en la bolsita cuatro galletitas rellenas; si las tabletas de chocolate vienen con dos barras, hay que poner dos barras de chocolate por bolsita, etcétera. Las servilletas, las nueces, los maníes y demás elementos podrían estar sueltos y habría que distribuir, respectivamente, uno, tres o cuatro a cada destinatario.

Las dificultades que se presentan aquí, con respecto a la actividad anterior donde los objetos estaban sueltos, es determinar *qué hay que contar*

21. Si bien designamos con el número 2 a esta actividad, no se trata de una secuencia de enseñanza. Aunque hayan resuelto exitosamente la distribución de pinceles en los vasitos, es necesario darles la oportunidad de realizar variadas experiencias en las cuales la relación que une el número de destinatarios y el número de elementos a distribuir sea diferente. La cuestión "¿cuántos platos se necesitan para darle dos a cada uno de los nenes y nenas de la sala?" es respondida por los alumnos: "Hay que contar". Pero durante cierto tiempo, no está claro qué hay que contar. La relación "dos veces más", si se entregan dos objetos, o "cuatro, cinco o seis veces más que alumnos" si se entregan cuatro, cinco o seis objetos a cada uno lleva un cierto tiempo que puede abarcar meses o años.

para buscar de una sola vez las galletitas rellenas o las tres nueces que le tocan a cada niño.

Buscar de una sola vez exige estrategias más elaboradas cuando los objetos se presentan agrupados de a tres, cuatro, cinco, seis o diez y esos *agrupamientos no corresponden* a lo que le toca a cada destinatario. Entonces, la cuestión es anticipar, por ejemplo, cuántas cajas de bombones hay que traer para distribuir dos en cada bolsita. Veamos una descripción de la actividad efectivamente realizada en un primer año.²²

Consigna

La docente repite varias veces la lista de elementos que debe contener cada bolsita: seis almendras, cuatro maníes, tres galletitas, dos ciruelas, dos caramelos, dos barras de chocolate, una servilleta.

Generalmente, enuncia primero los elementos y luego la cantidad, sin cambiar el orden de los elementos enunciados. Es la cantidad de cada tipo de objetos lo que justificaría el orden dado, pero los niños no lo advierten inmediatamente. Lleva cierto tiempo que los niños recuerden la consigna, es decir, puedan decir sin repetir ni olvidar ningún objeto, qué debería contener cada bolsita.

Organización de la tarea

Los objetos, inclusive las bolsitas, están agrupados según su tipo en mesas al fondo de la clase. La maestra forma tres o cuatro grupos, y deja dos alumnos para que se encarguen de buscar, uno las bolsitas y el otro las servilletas para toda la clase. Cada grupo debe buscar, de una sola vez, el número exacto de paquetes necesarios para distribuir los objetos que corresponden al grupo.

Las bolsitas, los caramelos y los maníes están sueltos, por lo cual no presentan dificultades nuevas. Las galletitas, que vienen en paquetes de seis y se necesitan tres por bolsita, presentan grandes dificultades. Los alumnos encargados de la anticipación están perplejos, proponen abrir los paquetes,

22. La lección, realizada por Mme. Brunet, está descripta en el texto de Brousseau y Foucaud (1992).

pero la regla es justamente contar los paquetes. Hay confusión entre el número de alumnos, el número de galletitas por alumno, el número de galletitas en cada paquete...

Las almendras vienen en bolsitas de diez, y se convierten en los objetos más difíciles de distribuir. En un grupo uno de los alumnos pide "paquetes de seis", y al constatar que todos los paquetes contienen diez afirma "No sirven". Finalmente, en su grupo se necesitaban 42 almendras, admite que necesita cinco paquetes y que le sobran algunas. La cuestión fundamental es que la maestra repite que hay que tomar un número de paquetes para que las almendras alcancen para todos, y los niños insisten —cuando al abrir un nuevo paquete sobran— en que hay demasiadas.

Para los otros objetos, las dificultades son similares. Cuando los elementos están por unidad, "sueltos", después de contar los destinatarios, los alumnos cuentan el mismo número de objetos o el número de objetos que se da a cada uno multiplicado por ese número. O también arman grupos de objetos según el número de destinatarios.

Cuando los elementos están agrupados en paquetes, el conteo de paquetes no se basa directamente sobre el número de destinatarios sino que exige una conversión constante entre el número de elementos del paquete, el número de paquetes y el número de destinatarios. Entre las estrategias que muestran los alumnos aparece el conteo íntimamente ligado con las operaciones.

6. A MODO DE CIERRE

Las listas de pasos necesarios para el conteo, así como de los aspectos constitutivos de la enseñanza del número, no intentan ser exhaustivas ni tampoco prescriptivas. Pretendemos que se constituyan, junto con algunas nociones de la didáctica de la matemática, en herramientas que le permitan al docente hacerse algunas preguntas en el momento de diseñar o elegir una actividad en relación con los números naturales.

Nos preocupamos por rescatar el sentido de los números naturales en matemática, más allá de que se utilicen cotidianamente en contextos escolares y extraescolares para identificar líneas de ómnibus locales, números de teléfono, fechas, turnos en la farmacia, etcétera. El eje de nuestro trabajo fue analizar la noción de número natural como los números que sirven para contar, y planteamos algunas actividades de distribución que favorecen el encuentro del alumno con ese conocimiento.

De ningún modo proponemos reemplazar las acciones que se realizan habitualmente —algunas de las cuales analizamos en el apartado 4— por los problemas de distribución, pues todas esas actividades apuntan a aspectos constitutivos de la noción de número. Lo importante es poder distinguir a cuál de ellos, y tratar entonces de abarcar el concepto ofreciendo a los alumnos una gama de experiencias lo más amplia posible.

BIBLIOGRAFÍA

- Mainé, Margarita y Patricia Morenza (1999): *Bambá*, Buenos Aires, Aique.
- Boyer, Carl (1969): *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 1999.
- Briand, Joël (1993): *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, tesis, Université Bordeaux I.
- Brousseau, Guy (1990): "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de la matemática? Primera parte", *Enseñanza de las Ciencias*, 8(3), Universidad Autónoma de Barcelona.
- (1994): *La investigación en didáctica de las matemáticas*, conferencia del 7 de febrero de 1994, IMIPAE, Barcelona.
- (1995): "Glossaire de didactique des mathématiques", en *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*, Bordeaux, Copirelem, IREM d'Aquitaine, LADIST.
- Brousseau, Guy y Rose Foucaud (1992): *Situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels*, Université Bordeaux I, IUFM d'Aquitaine.
- Brun, Jean (1994): "Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques", en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- El Bouazzaoui, H. (1982): *Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*, tesis, Université Bordeaux I.
- ERMEL (1990): *Apprentissages numériques. Cycle des apprentissages, grande section de maternelle*, París, Institut National de Recherche Pédagogique, Hatier.

Fregona, Dilma (1989): "La adquisición del concepto de número", *Opera Prima*, vol. 1, México, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Freudenthal, Hans (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company.

Rey Pastor, Julio; Pedro Pi Calleja y César Trejo (1952): *Análisis matemático*, Buenos Aires, Kapelusz, 1969 (8ª ed.).

5

APROXIMACIONES PARCIALES A LA COMPLEJIDAD DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN: AVANCES DE UN ESTUDIO ACERCA DE LAS INTERPRETACIONES NUMÉRICAS*

María Emilia Quaranta
Paola Tarasow
Susana Wolman

1. INTRODUCCIÓN

La tradición escolar para la enseñanza del sistema de numeración se basa en una serie de criterios, algunos de los cuales intentaremos discutir en este trabajo. Desde hace varios años contamos con estudios que permiten tener una mirada diferente sobre la enseñanza y el aprendizaje de este contenido (Lerner, 1992a, 1992b; Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994). En este capítulo nos dedicaremos a presentar nuevos resultados de investigación que hacen posible argumentar en la misma dirección. Tales resultados han sido obtenidos a partir de la realización de una secuencia didáctica destinada a hacer avanzar las interpretaciones numéricas¹ infantiles en el marco de un proyecto de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del sistema de numeración dirigido por Delia Lerner.² Queremos discutir aquí, en par-

*Queremos agradecer muy especialmente a Delia Lerner la lectura de este trabajo así como también buena parte de las ideas que aquí aparecen.

1. Por interpretación numérica entendemos toda actividad de lectura de números, independientemente de que los niños lo hagan o no de manera convencional.

2. Esta investigación viene desarrollándose, con subsidio UBACyT, en el Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Letras, a través de

ticular, tres criterios que atraviesan decisivamente el trabajo numérico en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB.

- Los niños aprenden los números de uno en uno y respetando el orden de la serie numérica. Desde esa perspectiva, para aprender un número determinado habría que conocer la serie que lo antecede. Además, no se otorga relevancia a los conocimientos que los niños pudieran haber construido acerca de los números mayores.
- El conocimiento del valor posicional de cada cifra en términos de “unidades”, “decenas”, etcétera, se constituye en el principal acceso válido para el aprendizaje de los números. Por lo tanto, se parte de la enseñanza de la base diez –utilizando variados recursos, como “ataditos”, figuras geométricas, papel con lunares– y la consecuente identificación de las agrupaciones resultantes.
- Los errores que los niños cometen al leer o escribir los números se adjudican principalmente a una ausencia de conocimientos.

En el terreno de la enseñanza, estos criterios se mantienen arraigados con toda vitalidad y reaparecen con mucha fuerza y resistencia.

Como mencionamos, son abundantes los datos disponibles ya desde hace tiempo (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994; Sinclair, 1988; Sinclair, Tièche Christinat y Garín, 1994; Scheuer *et al.*, 1996, 2000; Seron, Van Lit y Noël, 1995; Nunes Carraher, 1989; Higino da Silva, 1990) que muestran los conocimientos que construyen los niños acerca de la notación numérica. Si bien sólo la primera de las investigaciones mencionadas puso de manifiesto la posibilidad de diseñar y analizar el funcionamiento de un proyecto de

los siguientes proyectos: “El aprendizaje del sistema de numeración: conceptualizaciones infantiles e intervenciones didácticas” (1998-1999), “El aprendizaje del sistema de numeración: intervenciones docentes en diferentes contextos didácticos” (2000), ambos dirigidos por Delia Lerner, y “El sistema de numeración: enseñanza, aprendizaje escolar y construcción de conocimientos”, codirigido por Delia Lerner y Flavia Terigi, en curso. El equipo de trabajo está integrado, además, por Susana Wolman, Sofía Allami, Claudia Broitman, Cinthia Kuperman, Héctor Ponce, Fabiana Tasca, Paola Tarasow y María Emilia Quaranta. También han participado Mercedes Etchemendy y Verónica Batiuk.

Este trabajo ha sido elaborado a partir de los informes parciales realizados por todo el equipo.

enseñanza que toma en consideración las ideas que los niños construyen acerca del sistema de numeración, los otros estudios también pueden resultar de interés educativo.

En este sentido, el proyecto de enseñanza cuyo funcionamiento se estudia en la investigación que enmarca este trabajo sostiene un principio didáctico fundamental que guía la enseñanza del sistema de numeración y que puede expresarse así: “del uso a la conceptualización”. Usar la numeración escrita significa proponer situaciones donde los alumnos tengan que producir e interpretar escrituras numéricas, así como compararlas, ordenarlas y operar con ellas para resolver diferentes problemas. De esta manera, los alumnos detectan regularidades que permiten un uso más efectivo del sistema y avanzan a través de aproximaciones sucesivas hacia la comprensión del principio posicional que rige el sistema.

1.1. La secuencia de enseñanza³

La secuencia de actividades cuyos resultados se consideran en este artículo corresponde al primer año de la EGB y tiene como eje el juego de lotería.⁴ El objetivo didáctico de esta secuencia apunta a hacer avanzar las interpretaciones numéricas por parte de los alumnos promoviendo la construcción de relaciones válidas desde el punto de vista de la organización del sistema de numeración.

Se introdujeron nuevas reglas de juego de acuerdo con los objetivos didácticos perseguidos.

- Al “cantar” una bolilla, debe nombrarse el número, no las cifras que lo componen.
- Si los alumnos desconocen el número que deben nombrar o ubicar en su cartón, se pueden solicitar y ofrecer ayudas o “pistas”. Algunos ejemplos de pistas pueden ser:

3. La secuencia diseñada y estudiada consta de diferentes momentos que brindan a los alumnos sucesivas oportunidades de enfrentarse al problema de interpretar números en este contexto y reutilizar las relaciones que se van estableciendo.

4. Se trata del juego de uso social (lotería o bingo) que presenta los números escritos del 1 al 90. La secuencia fue diseñada y puesta a prueba en el marco del Proyecto UBACyT “AF 16”.

- el conteo a lo largo de la serie numérica para determinar el nombre o la escritura de un número —ya sea comenzando desde uno, desde más adelante o desde el nudo⁵ correspondiente—;
- dar el número anterior, el siguiente o ambos;
- dar el nudo correspondiente.⁶

Al cierre de este trabajo, tras el análisis crítico de cada uno de los tres supuestos en cuestión, se presenta una discusión general donde buscamos compartir algunas reflexiones con respecto a la enseñanza de los números escritos en la escuela.

2. DISCUTIENDO LOS CRITERIOS DE LA ENSEÑANZA USUAL

2.1. Los niños no aprenden los números de uno en uno y según el orden de la serie

Ya en el primer tramo de la investigación (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994) se ha documentado que los números escritos no se aprenden siguiendo el orden de la serie y de uno en uno sino a partir del establecimiento de relaciones entre ellos. La continuación de este proyecto nos ha permitido ampliar estos resultados.

Algunos de los conocimientos infantiles presentados en aquella primera etapa de la indagación señalan que los niños:

- construyen diferentes criterios que les permiten comparar números aun desconociendo su denominación convencional;
- conocen la escritura convencional de las potencias de la base y, luego, apoyándose en este conocimiento, la de los múltiplos de dichas potencias (nudos o “números redondos”) antes de conocer la notación convencional para los intervalos entre ellos;
- utilizan este conocimiento de los nudos y las relaciones que van estableciendo con la numeración hablada para intentar escribir números cuya notación convencional desconocen, dando lugar —bajo la hipótesis in-

5. Múltiplos de la potencia de la base o “números redondos”.

6. Múltiplo de la potencia de la base inmediato anterior (por ejemplo, 40 para 45).

fantil de la existencia de una correspondencia estricta entre la numeración hablada y escrita— a escrituras como las siguientes: 108 (para 18), 9005 (para 905), 800090024 (para 8924), 51000 (para 5000).

También se ha señalado que los niños utilizan sus conocimientos sobre la numeración hablada para apoyarse en sus interpretaciones de las escrituras numéricas y, recíprocamente, se basan en sus conocimientos sobre el sistema de numeración para inferir cuestiones respecto de la numeración oral.

Presentaremos ahora nuevos datos sobre interpretaciones numéricas de los niños que ponen de manifiesto algunas relaciones que van estableciendo entre la numeración escrita y la numeración hablada y cómo estas relaciones les permiten avanzar en la lectura de los números.

Saber el nombre de los dígitos ayuda a leer un número de dos cifras

Hemos constatado que los niños, al intentar leer números cuyo nombre desconocen, pueden basarse en el nombre de la cifra para leer la decena correspondiente. Por ejemplo, frente a la bolilla 45, asistimos al siguiente diálogo entre Micaela y Jimena:

Micaela: Treinta y cinco.

Jimena: No puede ser el treinta y cinco porque treinta suena a tres, y ése, que tiene un cuatro, tiene que ser cuaaaa... rent y cinco.

Este ejemplo, como muchos otros, pone de manifiesto que los alumnos descubren que los nombres de la decenas y de la cifras tienen algo que ver entre sí y ese conocimiento los ayuda a saber cómo comienza el nombre de un número o su escritura. El establecimiento de esta regularidad no se produce de manera inmediata ni simultánea para todos los niños de un mismo grupo. Llegar a establecer esta relación permite a los niños leer números que antes no sabían. Así, aun sin saber el nombre convencional de un número, pueden apoyarse en la similitud sonora entre el nombre de la cifra y el de la decena correspondiente.

¿Qué nos dice este conocimiento respecto del supuesto de que los números se aprenden de uno en uno y en orden? La relación mencionada no sigue el orden de las decenas: hay niños que llegan a establecer esta regu-

laridad para alguna decena, como por ejemplo entre "ocho" y "ochenta" sin generalizarla aún a otras, incluso menores, como 3 y 30.⁷

Los nudos ayudan a interpretar los números escritos

En Lerner, Sadovsky y Wolman (1994) se detalla cómo los niños conocen la escritura convencional de los nudos antes que la escritura de los números pertenecientes a los intervalos entre ellos. *Este conocimiento de los nudos sirve a los niños como apoyatura en sus producciones e interpretaciones numéricas de los números que aún no saben escribir y leer convencionalmente.* Los resultados de esta nueva investigación permitieron acrecentar lo que ya se sabía al profundizar en una situación de interpretación numérica.

Así, los niños pueden apoyarse en la escritura del nudo inmediatamente anterior: por ejemplo, para cantar 63, un alumno señala 60 en la grilla y luego lee "sesenta y tres". Este procedimiento y otros similares muestran que los niños están vinculando fuertemente cada nudo con el resto de la decena. Muestran igualmente que están considerando que a una parte común de las notaciones de ciertos números corresponderá una parte también común en sus denominaciones orales.

Veamos un ejemplo que pone en evidencia la relación establecida por los niños entre un número y el nudo correspondiente:

Martín y Magalí extraen el 28.

Jazmín: (pasa a ayudarlos) *Empieza con el dos, la cosa es que no me acuerdo cómo se llamaba éste.* (Señala el 20.)

Maestra: Miren, *¿se acuerdan cómo se llamaba éste?* (Señala el 20 que estaba escrito en el pizarrón.)

Agostina: *Veinte.*

Maestra: *El veinte es éste, muy bien.*

Jazmín: *Veintiocho.*

7. Por otra parte, en la numeración oral esta semejanza entre la denominación de las cifras y de las decenas no se respeta para las decenas del 10 y del 20. Por ejemplo: la palabra doce no guarda similitud sonora con la palabra uno, ni el veinte con dos. Por lo tanto, restringir el trabajo escolar sólo a estas decenas no permite que los alumnos pongan en juego la relación mencionada.

Este ejemplo, además de permitirnos observar el uso de la relación entre un nudo y el resto de la decena correspondiente, también nos muestra cómo Jazmín, quien en otro momento de la clase había podido nombrar por sí sola el 89, no lo logra con el 28. Sabe cuál es la pista que necesita pero, dado que esta decena presenta una irregularidad en su denominación respecto del nombre de la cifra, no recuerda el nombre de 20. Jazmín nos está demostrando que *no necesariamente leer un número mayor presenta más dificultades que uno menor*, a diferencia de la suposición fuertemente sustentada en las prácticas escolares que acompaña la creencia en la necesidad de presentar los números en orden.

Cabe subrayar aquí que, aun sin saber el nombre de los nudos, muchos niños logran determinar cuál es el que a ellos les ayudaría a interpretar una escritura numérica. Además del ejemplo de Jazmín que acabamos de citar, algunos alumnos solicitan a su docente que les diga el nombre del nudo que necesitan, señalándolo sobre la serie de los nudos escrita en el pizarrón como pista. En otras palabras, *el conocimiento del nombre convencional de un nudo no constituye una condición previa para que los niños establezcan esta relación* con los números que quieren interpretar.

¿Qué nos dice este conocimiento respecto del supuesto de que los números se aprenden de uno en uno y siguiendo el orden de la serie numérica? Las relaciones que los niños establecen entre los números escritos surgen al realizar comparaciones entre lo que sucede en diferentes decenas, qué aspectos se reiteran y cuáles se modifican. En consecuencia, es precisamente trabajando con amplios intervalos de la serie numérica como se hace posible construir estos conocimientos.

Si el nombre de dos números comienza igual, su escritura también

Otra idea que los niños parecerían construir, basándose en las relaciones que van estableciendo entre la numeración escrita y la hablada, es la siguiente: "si el nombre de dos números diferentes comienza de manera similar, su escritura comienza con la misma cifra" o también, recíprocamente, "si dos números comienzan con la misma cifra, su nombre comienza de manera similar".

Por ejemplo, cuando dos alumnos deben cantar el 48 y no saben de qué número se trata, recurren a la maestra para que les nombre el 45 que ya había salido y estaba anotado en el pizarrón. Así, logran leer el 48 conven-

cionalmente. Esta relación entre dos números de la misma decena extiende a los números de toda la decena la relación que mencionábamos entre dichos números y el nudo correspondiente.

Progresivamente, esta idea –según la cual si el nombre de dos números empieza igual, la escritura comienza con la misma cifra– se va especificando hasta establecer cuál es la cifra que corresponde en particular para cada nombre de decena. Así, escuchamos en boca de tantos chicos algunas de las siguientes regularidades que van descubriendo: “Todos los veinte empiezan con dos”, “Todos los cincuenta empiezan con cinco”, o “Todos los veinte o los treinta empiezan igual”.

Reiteramos aquí lo que afirmamos en los párrafos precedentes. *Esta relación se torna observable para los niños a partir del trabajo sobre diferentes rangos de decenas.* No puede advertirse que “todos los cincuenta comienzan con cinco” si no es confrontando estos números con otros pertenecientes a decenas diferentes. Por otra parte, esta relación entre todos los números pertenecientes a una misma decena no se establece siguiendo el orden de la serie: es decir, no la formulan primero para los números de la decena del 10, luego del 20 y así sucesivamente.

Establecer relaciones –entre diferentes escrituras numéricas y, en general, entre numeración escrita y numeración hablada– permite a los niños leer números que antes no hubieran sabido leer.

2.2. Conocer la organización en términos de agrupamientos recursivos de base diez no es necesario como punto de partida para el aprendizaje de la numeración escrita

Como decíamos al comienzo, uno de los supuestos que sostiene la enseñanza usual del sistema de numeración –y tal vez uno de los más difíciles de superar– parte de considerar que conocer los números equivale a conocer su organización en unidades, decenas, centenas, etcétera, por lo cual tal organización es introducida explícitamente en la enseñanza desde el momento en que hace su aparición el número diez.

Hasta aquí fuimos dando cuenta de algunos de los conocimientos que, en el contexto de la lotería, los niños ponen en juego en relación con el sistema de numeración: el recurso a los nudos, la relación con el nombre de la cifra, la relación con números de la misma decena. Estos conocimientos

involucran la construcción de regularidades que presenta el sistema de numeración. Estas regularidades fueron detectadas en las justificaciones que dieron los niños a sus interpretaciones, en las pistas que ofrecieron; también se han puesto de manifiesto en el momento en que los niños debían ubicar los números en el cuadro de control de bolillas extraídas –grilla de filas y columnas organizadas por decenas y unidades–.⁸

En las escuelas en las que se llevó a cabo la investigación no se había abordado la enseñanza de la numeración escrita desde su descomposición en unidades y decenas. Es decir que estas regularidades que los niños construyen no se vinculan con la enseñanza de los agrupamientos recursivos en base diez.

¿Cuáles son las nuevas relaciones que los niños establecen al ubicar los números en la grilla de control?

- Cada fila corresponde a una decena. Muchos alumnos mencionan la organización en categorías de números o porciones de la serie identificados por sus nudos: “Acá están los veinte” (señalando la fila correspondiente).
- En cada decena se repite el orden de las unidades. Algunos niños explicitan que en los números de dos cifras, se repite la misma secuencia del 1 al 9 en el lugar de las unidades. Por ejemplo, Federico, al tratar de convencer a sus compañeros de que después del 64 está el 65, afirma lo siguiente: “Como en todos los números, aparece el cuatro y después el cinco, aunque sea de los sesenta”. Algunos niños reconocen también que luego del 9 en las unidades cambia la decena.
- El orden de las decenas sigue el orden de las cifras. Para justificar la ubicación de los números en la grilla, vinculan el orden de las decenas con el orden de las cifras. “Mirá, acá va el diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa...” (señala la columna de nudos en la grilla). Acá va el setenta y tiene un siete, acá viene el ochenta y viene el ocho, y acá viene el noventa y viene el nueve.”

8. La grilla de control de los números extraídos se introdujo de acuerdo con dos modalidades diferentes: con la grilla completa, con todos los números escritos, donde los alumnos debían localizarlos y marcarlos; con la grilla vacía, donde los alumnos debían localizar los lugares y escribir allí los números que habían salido.

- Después del 9 en las unidades cambia la decena por una más. Algunos alumnos articulan las regularidades anteriores explicitando el modo de producción de los números. En efecto, descubren en la grilla que al llegar a 9 en las unidades, cambia la cifra de las decenas por una más. Un alumno afirma: "Porque va del uno al dos, al tres y así –refiriéndose a las cifras de las decenas–; cuando se termina –refiriéndose a la serie del 1 al 9 en el lugar de las unidades– entonces el tres –de las decenas– cambia por el cuatro y así...".

Algunos alumnos hacen además referencia a la regularidad de las columnas. Por ejemplo, para justificar cómo logran ubicar los números, Gustavo dice señalando las unidades: "Nosotros no contamos porque sabemos que hay una columna de cuatro, una de cinco, una de seis, una de siete, así...". O también Matías, cuando afirma: "Si acá está el cuatro... veinticuatro, treinta y cuatro...". Este procedimiento de buscar en la grilla siguiendo la columna de las unidades supone que los alumnos saben que se encontrarán con el número buscado en ese recorrido.

Muchas veces, los alumnos advierten esto como un conocimiento local referido sólo a la grilla; es decir, sin vincularlo con la organización del sistema. En algún caso, sí hemos asistido a una explicitación de la relación entre la organización de los números en la grilla y el sistema de numeración –aunque la situación didáctica no apunta a ello–. Así, al discutirse la ubicación del 20 en la grilla, se produce el siguiente diálogo:

Benjamín: *Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa* (señalando la columna de los nudos).

Maestra: *¿Y qué quiere decir eso?*

Benjamín: *Porque se están contando de diez en diez.*

Maestra: *Esa columna, entonces, ¿va de diez en diez? Y acá* (señalando otra columna), *¿no va de diez en diez?*

Benjamín: *Sí, va de diez en diez.*

En la clase siguiente, cuando la maestra pregunta qué pasa en la columna "de los cincos", Benjamín afirma que "en todos van de diez en diez" (refiriéndose a todas las columnas). Benjamín hace un intento por relacionar una regularidad (en todas las columnas el último número es el mismo) con alguna explicación referida a la organización de la numeración escrita.

Los conocimientos de los que fuimos dando cuenta se ponen en funcionamiento en esta secuencia y dependen estrechamente de las condiciones didácticas en ella creadas. Es necesario, por lo tanto, plantear otras situaciones para instalar una reflexión sobre las razones que subyacen en las regularidades descubiertas. De todos modos, este trabajo sobre la lotería y la grilla habrá permitido sentar las bases de ciertas "cosas" que suceden con los números para luego poder instalar la pregunta acerca de si sucederán siempre o sólo en este contexto en particular y a qué podrán deberse.

Ahora bien, ¿qué relación podemos encontrar entre los conocimientos numéricos que presentamos tanto en este apartado como en los anteriores y el trabajo escolar sobre agrupamientos?

Por un lado, observamos que los conocimientos que los niños construyen inicialmente acerca del sistema de numeración no refieren a su organización en términos de agrupamientos de base diez. Son conocimientos contruidos por los niños –incluso antes de su ingreso a primer año de la EGB, ya que la numeración escrita es un objeto social y no sólo escolar– a partir de sus interacciones con la numeración escrita como tal, al usar los números en diversas situaciones y reflexionar sobre ellos.

A partir de la participación en situaciones de uso de la numeración escrita, los niños detectan regularidades, construcciones que cumplen un papel importante en su camino de apropiación del sistema de numeración. El descubrimiento de estas regularidades constituye un paso necesario para que sea posible plantearse los problemas que conducen a reconstruir el principio posicional que rige el sistema. Tal como lo señala Lerner (1996)

[...] la construcción de regularidades es concebida como una bisagra necesaria entre el uso y la comprensión: por una parte, detectar regularidades es posible sólo a partir del uso y, una vez establecidas, ellas permiten lograr una eficacia creciente en el manejo de la numeración escrita; por otra parte, las regularidades constituyen una fuente de problemas que pueden llevar a desentrañar la naturaleza profunda del sistema.

En cambio, partir de la explicitación del valor posicional en términos de agrupamientos en base diez supone el intento de presentar de entrada la "versión acabada" de la organización del sistema de numeración –y de hacerlo en un momento de la escolaridad en el que todavía no es posible explicitar las operaciones multiplicativas subyacentes en tales agru-

pamientos—. Como puede leerse en la cita precedente, para que la búsqueda de los principios que rigen la organización del sistema de numeración adquiriera sentido, es necesario ante todo descubrir regularidades para poder preguntarse luego a qué obedecen.

Además, podemos mencionar que ya en Kamii (1986) y Lerner (1992a) se encuentran claramente explicadas las dificultades que enfrentan los niños respecto de la comprensión de las unidades, decenas y centenas que se les enseñan. Algunos ejemplos que dan cuenta de estas dificultades son que los niños señalan que en el casillero correspondiente a las decenas deben escribir 10 (en lugar de 1) “porque la decena equivale a diez”, o que 33 no tiene decenas porque “una decena es diez”, etcétera.⁹ En definitiva, el abordaje usual de la numeración escrita no sólo es infructuoso en el sentido de que los niños no llegan a comprender la organización que se les propone sino que también podría obstaculizar la comprensión del funcionamiento de los números y las operaciones (Wolman, 1999).

Las razones antes expuestas son las que nos han llevado a proponer una progresión que avanza desde el uso a la reflexión y la búsqueda de regularidades, dirigiéndose hacia la comprensión de las operaciones aritméticas que subyacen en nuestro sistema.

2.3. ¿Cuáles son los conocimientos numéricos que subyacen en los errores que producen los niños en sus interpretaciones numéricas?

Nos referiremos ahora a los conocimientos subyacentes en los errores cometidos por los niños al interpretar números escritos a lo largo de la secuencia de lotería. A diferencia de la enseñanza usual, consideramos que los errores no denotan falta de conocimiento, sino un estado particular del conocimiento, en el camino hacia la apropiación progresiva del sistema de numeración. Son el fruto de sus aproximaciones parciales a dicho sistema.

En relación con las escrituras e interpretaciones no convencionales —“erróneas”— por parte de los niños, sabemos ahora que están guiadas por hipótesis acerca del sistema de numeración. Dichas hipótesis constituyen

9. Asimismo, se muestran las dificultades que este trabajo acarrea sobre la comprensión de las operaciones: los niños terminan pensando a los números como si estuviesen constituidos por cifras aisladas y pierden el control de la globalidad de los mismos.

conocimientos parciales sobre los números escritos que, a partir de su uso en diversas situaciones, su confrontación con las ideas de sus compañeros y con escrituras e interpretaciones convencionales, irán avanzando progresivamente.

Lo que nos interesa en este apartado es preguntarnos *qué deben saber los niños para equivocarse de una manera determinada*. Para ello, nos detendremos ahora a analizar los errores que aparecieron recurrentemente entre los alumnos que participaron de la secuencia.

Sustituciones de decenas

En todos los grupos hemos encontrado niños que producen sustituciones de decenas, esto es, se refieren a otra decena en lugar de la correspondiente, pero respetando el nombre de las unidades. Éstas aparecieron en tres instancias diferentes: al leer las bolillas, al escuchar un número “cantado” y anticipar su composición, y al señalar en los cartones.

- *Sustituciones de decenas al leer un número.* Algunos niños leen ciertos números de dos cifras respetando la de las unidades pero cambiando la denominación de la cifra correspondiente a las decenas por el nombre de otra decena. Por ejemplo, al interpretar 23, un niño lee sucesivamente “cuarenta y tres” y “treinta y tres”; al interpretar 38, otro niño lee “cincuenta y ocho”. Es importante señalar que los niños sustituyen utilizando sólo nombres de otras decenas; en ningún caso palabras referidas a otras potencias de la base.

¿Cómo explicar estas sustituciones? Es posible que los niños hayan construido una clase de palabras que sirven para nombrar números de dos cifras y a la que pertenecen “treinti”, “cincuenti”, “ochenti”... (todas las denominaciones referidas a las decenas). Esas palabras serían intercambiables (provisoriamente) porque, aunque los niños han establecido ya una relación entre numeración hablada y numeración escrita y reconocen esas denominaciones como correspondientes a los números de dos cifras, no saben aún exactamente cuál es la denominación que corresponde a cada una de las cifras que aparecen en el lugar de las decenas (Lerner, 2000 y 2001).

Las sustituciones realizadas en los números de la decena del 20 podrían deberse, además, a la dificultad que presenta la denominación “veinte”,

que no guarda similitud alguna con la denominación del dígito correspondiente (dos). Así un niño lee "cuarenta y siete" para 27, y otro interpreta como "dieciséis" la escritura del 26.

- *Sustituciones de decenas al anticipar la composición de un número "cantado"*. Este error es diferente del anterior: en este caso, los niños dan nombres de cifras tanto para las unidades como para las decenas, sustituyen sólo la cifra correspondiente a las decenas y dicen correctamente la de las unidades. Por ejemplo, cuando se canta el 45, dos alumnos dicen respectivamente: "el dos y el cinco" y "el nueve y el cinco". Otro alumno, al cantarse el 65, dice "el cuatro con el cinco". Por su parte, Matías pregunta si el 31 cantado es "el cuatro con el uno". Estas interpretaciones de los números que son "cantados", tratando de pensar cómo se componen, podrían constituir anticipaciones de la escritura numérica correspondiente.¹⁰

Algunos niños hacen pública su duda acerca de la cifra correspondiente a las decenas. En este sentido es interesante observar cómo Luciana, habiéndose cantado 29, pregunta "¿El nueve con el qué?". La idea que conduce a algunos alumnos a poner otra cifra que acompañe la de las unidades podría estar orientada por una idea similar a la de Luciana: "el nueve va con algo". En relación con este "error", es necesario mencionar el trabajo de Mónica Alvarado (Alvarado y Ferreiro, 2000), donde expone resultados de una investigación llevada a cabo en México. Allí, se refiere al uso de "comodines" por parte de los niños para escribir la cifra de las decenas del número que se les dicta, correspondiente a números de teléfono.¹¹ Estos números "comodines" en el lugar de las decenas estarían indicando que los alumnos ya saben que deben escribir una cifra más, aunque aún no saben cuál es la que corresponde. Dentro de estos comodines, la autora plantea que el 0 es el comodín privilegiado, y las razones para emplearlos son evidentes: "es un número especial, un casi-número, ya que no sirve para contar".

En el juego de la lotería, algunas de las respuestas de los alumnos pueden relacionarse con este uso de los comodines. Los niños parecerían ya

10. Scheuer *et al.* (2000) encuentran que los niños producen sustituciones de decenas al escribir números al dictado.

11. En México, los números telefónicos se presentan y se leen en grupos de dos cifras.

conocer la cifra de las unidades y están seguros de que necesitan otra más, aunque aún no saben cuál es la que corresponde. Por otro lado, podría suceder que estas sustituciones hayan sido producidas por alumnos que tenían efectivamente en sus cartones los números a los cuales ellos refieren erróneamente y lo hicieran por ansias de completar más casilleros y ganar.¹² Lo mismo podría decirse de las sustituciones de decenas al señalar en los cartones.¹³ Sin embargo, nos inclinamos a pensar que, en algunos casos, este error podría originarse en interpretaciones independientes de los números que los niños tenían en sus cartones, ya que afirmaciones de este tipo surgieron rápidamente, ni bien escuchaban el número cantado y a veces sin mirar en sus cartones.

Inversiones

Frecuentemente los niños producen inversiones en dos circunstancias diferentes: al "cantar" (al dar la interpretación oral de un número escrito) o al localizar los números en el cartón (al dar la interpretación escrita de una denominación numérica oral).

- *Inversiones numéricas al "cantar" los números*. ¿Qué sucede con los niños que producen inversiones al leer los números? Estos errores incluyen interpretaciones tales como "cuarenta y dos" para 24, "ochenta y uno" para 18 o "cuarenta y uno" para 14. En principio, del mismo modo que los alumnos que producen sustituciones de decenas, los alumnos que producen inversiones sí están teniendo en cuenta que el nombre del número interpretado pertenece a una categoría particular, la de las decenas: ya saben clases de palabras para nombrar números de dos cifras. En el caso de la sustitución de las decenas, al no conocer el nombre de

12. Estos resultados se enmarcan en el contexto del juego de la lotería. Lo resaltamos porque es fundamental poder entender las condiciones que cada contexto particular impone y vincular con ellas también las respuestas de los niños. En el caso del juego de la lotería, por tratarse precisamente de un juego, el interés por ganar puede predominar sobre el deseo de comprender, entonces muchas de las respuestas —sobre todo cuando marcan en los cartones— pueden deberse a la intención de tener más números marcados.

13. Por esta razón, no nos detendremos a analizar esta tercera clase de sustituciones de decenas.

la decena correspondiente, los niños utilizaban otro nombre de dicha categoría, respetando en su interpretación el orden correspondiente a las unidades. Los niños que producen inversiones al leer, por su parte, también utilizan nombres correspondientes a las decenas, sólo que no están teniendo en cuenta el orden convencional: *no asignan el nombre de cualquier decena sino la correspondiente a la cifra de las unidades.*

En algunos casos, las inversiones al "cantar" pueden deberse a que conocen el nombre del número con las cifras invertidas y no el que les corresponde nombrar: por ejemplo, cuando una alumna lee "quince" para 51; o "dieciséis" para 61, es posible que ya conozca el nombre de los números de la decena del diez, por el hecho de ser más frecuentados por los niños. En otros casos, pueden deberse a que es posible reconstruir el nombre de la decena más fácilmente a partir de la relación con la numeración hablada, como cuando leen "ochenta y siete" para 78; o el ejemplo de "setenta y dos" para 27. Por supuesto, pueden ponerse en juego ambos criterios en diferentes ocasiones: en algunas uno y en otras el otro.

- *Inversiones numéricas al marcar los números en los cartones.* En cuanto a las inversiones que producen algunos niños al localizar (señalando en su cartón, por ejemplo, el 25 cuando se ha cantado el 52), hay dos interpretaciones posibles. Puede ser que reconozcan las cifras correspondientes a la denominación oral pero aún no tomen en cuenta (o no lo consideren en ese caso en particular) el papel de la posición. Sin embargo, esta localización aparentemente equivocada también puede deberse, como mencionamos en el caso de las sustituciones de decenas al ubicar los números en el cartón, al deseo de ganar; es decir, a las características específicas de la situación. La primera de estas interpretaciones parece más adecuada cuando los alumnos producen inversiones también al leer, en tanto que la segunda probablemente sea más pertinente cuando sólo se producen inversiones en el momento de localizar los números en los cartones.

Al respecto, consideramos importante señalar que prácticamente todos los alumnos parecen considerar en otro momento la posición en el sistema de numeración: cuando dos escrituras numéricas presentan las mismas cifras pero en diferente orden, sostienen que no pueden corresponder al mismo número. En otros términos, aun desconociendo cuál es la desig-

nación oral que corresponde a cada escritura, no aceptan que las mismas cifras, pero invertidas, estén representando al mismo número. Esto es afirmado incluso por niños que producen inversiones al "cantar" las bolillas o al señalar los números en el cartón.

Un aspecto que queremos resaltar es que los alumnos que cometen inversiones no son los que "menos saben" en los grupos. Como muestran los ejemplos, *realizar una inversión supone saber muchas cosas acerca de los números:* nombrar un número o asignarle una escritura requiere saber que el número en cuestión se compone de dos cifras y saber cuáles son las cifras involucradas. En el caso de la interpretación oral de un número escrito, se muestran capaces de elegir el nombre de otra decena (no un nombre cualquiera) y, específicamente, el nombre de la decena correspondiente al número invertido.

Otros errores

Hemos encontrado en algunos niños otros errores, por ejemplo, confusiones entre 60 y 70, dar el nombre de un número que coincida en una cifra con el que deben leer pero sin tener en cuenta su posición o señalar un número de una cifra en otro de dos cifras que lo contiene. Veamos cada uno de ellos.

- *Confusión entre 60 y 70.* Frecuentemente, los niños confunden el 60 con el 70. Esta confusión se produce en ambas direcciones (60 en lugar de 70 y 70 en lugar de 60) y en ambos momentos (lectura de bolillas de la lotería y búsqueda de los números en los cartones). Este error se basa en la similitud sonora entre las denominaciones de ambas decenas. Podemos ver los esfuerzos que hacen los niños para diferenciarlas en algunos ejemplos. Luciana plantea, al discutir acerca del número 71, "Con el siete empiezan los setenta y... éste (señala 60) no es igual a éste (señala 70). Éste no suena igual a éste". Por su parte, Federico dice: "El sesenta tiene una te solita y el setenta tiene una te y una te, tiene más letras".

Un hecho que podemos vincular con este tipo de error es el siguiente: hemos observado —en diferentes oportunidades y no sólo en el contexto de este juego— que muchas veces, cuando los niños van recitando la serie de nudos de las decenas (10, 20, 30...), al llegar a 60, pasan directa-

mente al 80, como si creyeran que nombrando el 70 se repitiera el mismo número.

Así vemos que, si bien la similitud sonora lleva a confundir los nombres correspondientes a estas decenas, la confrontación con las escrituras numéricas y un análisis del modo como se vinculan con la denominación de las cifras correspondientes los lleva a diferenciarlos.

- *Señalar un número que coincida en una cifra.* En este caso, los niños marcan en los cartones un número que coincide en una cifra con el cantado sin tener en cuenta la posición. Ejemplos de esta clase de errores nos traen los niños que señalan en sus cartones 17 para 73; 78 para 37; 13 para el 21, 45 para 52. Es interesante lo que acota un niño, cuando produce un error de este tipo. Al señalar 14 para el 31, Matías dice "porque tiene que tener un uno".
- *Señalar un número de una cifra en otro de dos cifras que lo contiene.* Este tipo de error se produce cuando se canta un número de una cifra y los niños lo señalan en otro de dos cifras que lo contiene, ya sea en el lugar de las unidades o en el de las decenas. Por ejemplo, cuando se canta 3, algunos niños lo señalan en el 73, o cuando se canta 9 lo señalan en el 29. Podría tratarse de un caso particular del error recién descrito. Aparece sólo en uno de los registros analizados, y en los alumnos menos avanzados.

Estos dos últimos tipos de errores aparecen con muy escasa frecuencia y en ciertos alumnos, los menos avanzados. Los nombres de los números que se reconocen son los de las unidades, o los nombres de alguna de las cifras. No se está recurriendo aquí a nombres de decenas.

Sin embargo, queremos destacar que aun así los niños que cometen estos errores *están poniendo en juego conocimientos sobre la escritura numérica*: en todos estos casos, podrían estar señalando la cifra que han identificado en el nombre o la escritura más allá de que crean o no que todo el número se escribe o denomina de ese modo. Es como si establecieran: "Éste va".

Intentamos mostrar hasta aquí, a lo largo de todo el apartado 2.3, que los errores cometidos por los niños en sus interpretaciones de la escritura correspondiente a los números están vinculados con la existencia de cono-

cimientos parciales que van construyendo a propósito de este objeto de conocimiento que es el sistema de numeración.

Ahora bien, no queremos concluir sin mencionar el *interés didáctico* de la aparición y circulación de estos errores en toda la clase. Promover el análisis de los errores por parte de todo el grupo escolar permite avanzar no sólo a los alumnos que produjeron el error, sino también a aquellos que "sabían más". Al discutir con sus compañeros, al explicitar posiciones, al tratar de convencerlos acerca de lo que ellos piensan, los alumnos deben buscar diferentes argumentos, y esto permite que analicen los números estableciendo nuevas relaciones entre ellos.

Queremos traer, a título de ilustración, el intercambio que se suscita en la clase a partir de uno de estos errores.

Sergio señala el 17 para "siete".

Candelaria: *Éste no es, es el uno con el siete; éste es el diecisiete. Diez... y siete... Si dejás éste solo (tapa el 1 de 17) queda siete, pero con el uno es diecisiete.*

La maestra retoma para toda la clase la discusión que se produce entre Candelaria y Sergio.

Federico: *Ése (por el 17) no es el siete. Si le sacás el uno son iguales. [...] Parece el siete pero no es, si cada vez que aparece el siete contamos siete solo, lo contaríamos muchas veces.*

En este ejemplo es notable el esfuerzo que hacen Federico y Candelaria. Ambos parten de ponerse en el punto de vista de Sergio para, desde allí, argumentar a favor de la interpretación alternativa que quieren ofrecerle. Entonces, a la vez que tratan de explicitar por qué parecería "lógica" la confusión de Sergio, ofrecen argumentos para tratar de convencerlo de que marcó otro número.

Federico apela a la serie numérica hablada y a la organización del sistema de numeración: "Si a todos los que terminan en siete, los llamamos siete, los contaríamos muchas veces". Es decir, la misma cifra se repite en muchos números diferentes. Candelaria, por su parte, lo hace apelando al valor de cada una de las cifras de acuerdo con su posición (diez, para referirse al uno...) explicitando una descomposición aditiva del número para mostrar que era siete "y algo más".

Tales intercambios no pueden tener lugar cuando el docente corrige de manera inmediata los errores ofreciendo la respuesta correcta o confirma

de entrada las afirmaciones válidas. Es probable que esta actitud frente a los errores y a las respuestas correctas obedezca a que, en la enseñanza usual, se considera a los primeros como indicadores de *ausencia* de conocimiento y a las segundas como *garantía* de conocimiento. En consecuencia, desde esa perspectiva, se hace necesario corregir rápidamente los errores para evitar que "se fijen" y establecer en su lugar la versión oficial.

Comprender la naturaleza de esos errores, cuáles son los conocimientos parciales que los están sosteniendo y en qué medida participan del acercamiento progresivo al sistema de numeración hará posible tal vez permitir a los errores "vivir" provisoriamente en las aulas e intervenir, poco a poco, en dirección a su superación.

3. DISCUSIÓN

A lo largo del trabajo hicimos referencia a diferentes relaciones que los niños van estableciendo en sus intentos por apropiarse del sistema de numeración. Queremos retomar ahora algunas de las cuestiones que fuimos planteando para apoyar nuestras reflexiones con respecto a la enseñanza de los números en la escuela.

Los datos presentados permiten afirmar, una vez más, que los números no se aprenden de uno en uno y siguiendo el orden de la serie, que muchos errores que los niños cometen están sostenidos por conocimientos —parciales— acerca del sistema de numeración y que el significado multiplicativo de las cifras no forma parte de los aprendizajes iniciales respecto a dicho sistema. En esta discusión final, queremos basarnos en estos resultados relativos al aprendizaje de los números escritos para esbozar algunas reflexiones acerca de su enseñanza.

En primer lugar, los ejemplos citados, además de mostrarnos las relaciones que los alumnos van estableciendo entre los números, nos permiten advertir que si la escuela se limitase a proponer a los alumnos trabajar sólo con márgenes acotados de números (hasta el 10, 20, 30), las diferentes relaciones entre la numeración hablada y la numeración escrita que mencionamos (relación entre el nombre de las cifras y las decenas, relaciones entre el nudo y el resto de la decena, relaciones entre números de una misma decena, categorías de palabras para las decenas, etcétera) no podrían ponerse en juego. Como vimos, no intervienen todas estas relaciones con la

misma regularidad en las primeras decenas que en las restantes y, por otra parte, si sólo se trabajara con algunas decenas, estas regularidades no se pondrían de manifiesto porque, justamente, se advierten al comparar diferentes escrituras numéricas y sus denominaciones, y establecer semejanzas y diferencias entre ellas.

Con respecto a la presentación de los números en orden, por otra parte, vimos cómo no necesariamente los números mayores presentan más dificultades que algunos menores en la serie. Tampoco, por supuesto, se trata de evitarles a los alumnos enfrentarse a estas dificultades; justamente serán ocasiones para avanzar en sus reflexiones acerca de la numeración escrita.

Si sólo se propusiera interpretar números cuya denominación y/o escritura convencional estamos seguros de que los alumnos ya conocen, no habría ocasiones de recurrir a estas relaciones para hacerlo. El interés de que lo hagan consiste en que, de ese modo, construyen conocimientos acerca del sistema de numeración y no sólo de la escritura numérica particular que deben interpretar.

En segundo lugar, nos preocupa que puedan interpretarse las ideas infantiles de las cuales estamos dando cuenta como conformando una psicogénesis en sentido estricto, esto es en términos de niveles que guardan una relación de inclusión jerárquica.¹⁴ Si lo es en el sentido de un proceso dialéctico de formación que, a partir de poner en juego los conocimientos disponibles por el sujeto, en la interacción con este objeto de conocimiento que es el sistema de numeración y a través de diferentes intercambios con usuarios de dicho sistema, se transformarán progresivamente para dar lugar a nuevos conocimientos que, a su vez, permitirán nuevos usos más ajustados y así sucesivamente.

En tercer lugar, queremos advertir acerca del peligro de creer que, conociendo cuáles son las ideas que los niños van construyendo, podemos "tomar el atajo" de enseñárselas directamente en lugar de intentar plantear situaciones didácticas que permitan usar y reflexionar acerca de las relaciones que queremos que ellos descubran.

¿Cuál es la diferencia entre presentarles directamente estos conocimientos o promover que los alumnos los utilicen para ayudarse a inter-

14. Además, los resultados que aquí se enuncian fueron obtenidos en el marco de una intervención didáctica.

pretar números escritos? En el segundo caso, están descubriendo relaciones entre la numeración oral y la numeración escrita y realizando inferencias a partir de allí, las cuales, por otro lado, podrán generalizarse a otros números, no sólo utilizarse frente a los casos particulares que deben interpretar en un momento dado. A su vez, estos descubrimientos les permitirán no sólo progresar en la lectura y escritura de números, sino también en la comprensión progresiva sobre el sistema de numeración. En pocas palabras, se trata de la diferencia entre (a) transmitir directamente un conocimiento cuyas relaciones subyacentes nada nos garantiza que los alumnos puedan reconstruir y (b) promover el descubrimiento de unas relaciones que permitan avances en el uso de los números y en la comprensión de su organización.

No se trata tampoco de relaciones que habrá que ir presentando en un orden determinado. La heterogeneidad de conocimientos que cohabitan en una clase hará posible y necesaria la utilización de diferentes relaciones. Algunos alumnos podrán apropiarse de unas, otros de otras. Además, los intercambios en la clase serán una oportunidad para que las regularidades descubiertas por algunos puedan circular y difundirse al resto del grupo, dentro del cual habrá quienes podrán tenerlas en cuenta. Otros podrán hacerlo más adelante, pero estos conocimientos ya habrán comenzado a vivir dentro de la clase y se habrán instalado de algún modo, por lo que quedan disponibles para que el docente u otros compañeros puedan remitir a ellos en futuras ocasiones.

La situación de lotería plantea problemas de búsqueda de la designación oral de números escritos y de búsqueda de la escritura de designaciones orales de números. Ahora bien, los alumnos pueden buscar respuesta a estos problemas de diversas maneras, poniendo en juego diferentes relaciones numéricas —esto es, diferentes conocimientos numéricos— y, en el contexto de intercambio que se intenta promover, todos pueden avanzar en la elaboración de sus conocimientos.

Esto nos lleva, en cuarto lugar, a otro punto al cual quisiéramos referirnos. En esta situación, todos los alumnos tienen posibilidad de aprender diferentes aspectos sobre el sistema de numeración. Aun para aquellos niños que leen convencionalmente todos los números involucrados en el juego desde el inicio de la secuencia, la condición de dar pistas o también la de argumentar a favor o en contra de la interpretación de algún número o alguna relación mencionada les exige analizar la numeración explicitando re-

gularidades relativas a su organización. Es decir, les permite también avanzar en su comprensión del sistema.

En quinto lugar, y en íntima relación con lo anterior, es necesario resaltar que, aun cuando dos alumnos lean convencionalmente un número, no necesariamente saben lo mismo acerca del sistema de numeración. O, dicho en otros términos, la lectura (y, podríamos agregar, también la escritura) convencional de un número no constituye un punto de llegada terminal —claro que ninguno lo es— en relación con la comprensión de los números. Al mismo tiempo que progresan sus posibilidades de uso de los números se está apuntando a establecer regularidades que permitan explicitar aspectos relativos a la organización del sistema de numeración. La búsqueda de las razones de dichas regularidades los llevará a introducirse en las operaciones aritméticas subyacentes en el sistema de numeración.

Si bien no es un objetivo didáctico de esta situación, ya que la secuencia del juego de lotería fue diseñada como situación de *uso* del sistema —y no específicamente orientada hacia la explicitación de regularidades—, ha dado lugar, no obstante, a explicitaciones por parte de los niños referidas a algunos aspectos de la organización del sistema de numeración.

Como pudo observarse a lo largo de este trabajo, la participación de los niños en situaciones de uso de la numeración escrita les posibilita detectar regularidades que cumplen un importante papel en el camino hacia el conocimiento del sistema de numeración. Sin embargo, estas regularidades son insuficientes para la conceptualización: es necesario encontrar las razones que las explican, objetivo didáctico que queda abierto a futuras situaciones a plantearse en los siguientes años de la escolaridad. Entonces, será necesario proponer también situaciones que apunten a que, una vez descubiertas las regularidades, intenten explicar las razones que las configuran, es decir, situaciones que permitan avanzar en la reflexión acerca de las relaciones aditivas y multiplicativas que subyacen en la numeración escrita.

En sexto lugar, podemos preguntarnos por qué es importante incluir en las clases el análisis de los errores. Es muy usual que el maestro valide rápidamente la respuesta correcta y sancione, por otro lado, las respuestas que considera incorrectas. Seguramente, este tipo de intervención esté guiado por la idea de que los errores son indicadores de ausencia de conocimiento y que es necesario corregirlos inmediatamente para que el alumno que los produjo no los repita. Se verifica aquí, en relación con la apropiación

ción del sistema de numeración, la mirada sobre los errores constructivos que Piaget nos transmitió: éstos son fruto de aproximaciones sucesivas que los niños hacen respecto del objeto de conocimiento.

Podríamos preguntarnos qué es lo que varía cuando es el maestro quien dice la respuesta correcta o cuando son los alumnos los que, por medio de un proceso de reflexión, tratan de justificar por qué un conocimiento es válido o no. Cuando la maestra corrige directamente –por ejemplo, un número interpretado de manera no convencional–, su intervención sólo sirve para ese número en particular y en esa situación particular. En cambio, si se promueve el análisis de ese error y la discusión por parte de los chicos, se propicia el establecimiento de relaciones numéricas que no sólo le sirven al alumno que produjo el error, ni queda restringido solamente a ese número.

Por último, quisiéramos contrastar la propuesta que aquí se plantea con respecto al juego de la lotería y otras modalidades en que el mismo juego suele utilizarse en las aulas de primer año de la EGB. No es una condición para jugar que los niños ya sepan leer números. Por el contrario, la riqueza de esta secuencia reside precisamente en la posibilidad de que los alumnos avancen en el conocimiento de las interpretaciones numéricas y de las relaciones que pudieran establecer. Por eso, la propuesta implica trabajar desde la primera clase con todos los números que aparecen en las loterías convencionales. No proponemos ir agregando un número nuevo cada vez, ni trabajar con loterías parciales hasta determinada decena sólo después de haberla “enseñado”. Insistimos, el diseño de la situación (el dar y recibir pistas, el análisis de los errores, el trabajo con la grilla) apunta justamente a que los alumnos *avancen en su interpretación de escrituras numéricas*, detectando regularidades que cumplen un importante papel en el camino hacia el conocimiento de nuestro sistema de numeración, regularidades que, como ya explicamos, difícilmente puedan establecerse si se trabaja con una porción acotada de la serie numérica.¹⁵

15. La situación de lotería constituye una situación de interpretación de números escritos que no pone en juego el valor cardinal. Se advierten con claridad los límites de esta situación y la necesidad de proponer paralelamente otras situaciones en las que el valor cardinal se coloque en primer plano (Lerner, 2000). Acerca de otros aspectos de los conocimientos numéricos, pueden consultarse, en este mismo volumen, los capítulos 1, 3 y 4.

Hemos presentado aquí una serie de resultados acerca de las relaciones que establecen los niños entre la numeración hablada y la numeración escrita en sus interpretaciones numéricas, resultados que nos permiten cuestionar algunas prácticas habituales con respecto a la enseñanza de la numeración escrita.

BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado, M. y E. Ferreiro (2000): “El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años”, *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, año 21, n° 1, Buenos Aires, marzo de 2000.
- Higino da Silva, Z. M. (1990): “A criança e a escrita numérica”, *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, vol. 71, n° 168, Brasília, mayo-agosto de 1990.
- Kamii, C. (1986): “El valor posicional: una explicación de su dificultad y de sus implicancias educativas”, *Journal of Research in Childhood Education*, vol. 1, n° 2.
- Lerner, D. (1992a): *La matemática en la escuela aquí y ahora*, Buenos Aires, Aique.
- (1992b): “Constructivismo y escuela”, *Cuadernos de la Fundación EPPEC*, Buenos Aires.
- (1996): *El sistema de numeración: del uso a la conceptualización*, conferencia dictada en el marco del “Homenaje Latinoamericano a Piaget en el Centenario de su Nacimiento”, organizado por la Facultad de Educación y el Instituto de Psicología de la Universidad de San Pablo, Brasil, junio de 1996.
- (2000): *Informe final del proyecto anual AF 16 “El aprendizaje del sistema de numeración: situaciones didácticas y conceptualizaciones infantiles”*, Secretaría de Ciencia y Técnica, Universidad de Buenos Aires.
- (2001): *Informe final del proyecto anual AF 41 “El aprendizaje del sistema de numeración y la intervención docente en diferentes contextos didácticos”*, Secretaría de Ciencia y Técnica, Universidad de Buenos Aires.
- Lerner, D.; P. Sadovsky y S. Wolman (1994): “El sistema de numeración: un problema didáctico”, en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.

- Nunes Carraher, T. (1989): "O desenvolvimento mental e o sistema numérico decimal", en T. Nunes Carraher (comp.): *Aprender pensando*, Petrópolis, Voces.
- Scheuer, N.; A. Bressan, C. Bottazzi y T. Canelo (1996): "Éste es más grande porque... o cómo los niños comparan numerales", *Revista Argentina de Educación*, n° 24, octubre de 1996.
- Scheuer, N.; A. Sinclair, S. Merlo de Rivas y C. Tièche Christinat (2000): "Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales", *Infancia y Aprendizaje*, n° 90, Barcelona, 2000.
- Seron, X.; M. Van Lit y M. Nöel (1995): "La lecture de numéraux arabes chez des enfants en première et en deuxième années primaires: recherche exploratoire", *Archives de Psychologie*, n° 63, Ginebra.
- Sinclair, H. (dir.) (1988): *La production de notations chez le jeune enfant*, París, PUF.
- Sinclair, A.; C. Tièche Christinat y A. Garín (1994): "Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres?", en M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavinot (eds.), *Vingt ans des mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Wolman, S. (1999): "Los algoritmos de suma y resta: ¿por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles?", *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, IICE, año VIII, n° 14, Buenos Aires, agosto de 1999.

6

DISCUSIONES EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA: QUÉ, PARA QUÉ Y CÓMO SE DISCUTE

María Emilia Quaranta
Susana Wolman

1. INTRODUCCIÓN

Según la opinión de muchos docentes, así como también para gran parte de la literatura didáctica, es necesario generar, en algún momento de las clases, una "puesta en común". Este concepto ha recibido las más dispares explicaciones e, incluso, las más variadas denominaciones (confrontación, discusión, reflexión, debate, etcétera). Habitualmente se define la "puesta en común" como una exposición, por parte de todos o algunos de los alumnos, de los resultados de una tarea o de los caminos que condujeron a esos resultados.

Ahora bien, aun cuando no se cuestiona la necesidad o importancia de estos momentos, no resulta para nada claro por qué o para qué son tan relevantes. Menos claro todavía resulta el modo como deben ser organizados y conducidos. Consideramos que la didáctica de la matemática constituye una fuente de conocimientos esencial para la tarea del docente. Intentaremos pues precisar el significado de estos momentos desde el enfoque de la enseñanza de la matemática que sostenemos y nos referiremos a algunas condiciones didácticas de la organización y gestión de instancias de discusión en el aula.

2. ¿QUÉ SON LOS MOMENTOS DE DISCUSIÓN?

Desde la didáctica de la matemática, los momentos de discusión involucran mucho más que una simple explicitación frente a toda la clase de las producciones individuales. Su valor central reside en que son potencialmente fructíferos para la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones (ERMEL, 1993, 1995).¹ En consecuencia, no se trata sólo de dar a publicidad una serie de enunciados; es necesario, además, buscar razones, argumentar intentando defender su verdad o falsedad.

Los momentos de discusión conforman una de las modalidades que adquiere la interacción entre pares en el aula: se trata de un intercambio entre todos los alumnos de la clase conducido por el docente. De ninguna manera constituyen "eventos naturales" de la vida en el aula: las discusiones no pueden quedar libradas a las contingencias de una clase o a la espontaneidad de los alumnos. Por el contrario, deben ser organizadas intencional y sistemáticamente por el maestro, a quien le corresponde un papel central e insustituible en su desarrollo: "Todo esto no se realiza espontáneamente, la intervención de la maestra es decisiva y, justamente, organizar con éxito el momento de la confrontación es una de las mayores dificultades que perciben los docentes" (Saiz, 1995).

El grupo ERMEL (1995) señala que corresponde al docente hacer sacar a luz —explicitar o hacer público—, hacer circular y, si es posible, analizar y someter a discusión por toda la clase las producciones de un alumno o un grupo de alumnos. Es el momento, bajo la conducción del maestro, de comunicar los procedimientos y resultados, difundirlos, intentar comprender los procedimientos de otros, compararlos, poder reconstruir aquéllos que parecen más eficaces, valorar los aspectos positivos de las diferentes producciones, considerar cuán generalizables son a otras situaciones, confrontarlos, cuestionar y defender las diferentes proposiciones utilizando argumentos vinculados con los conocimientos matemáticos en cuestión.

También corresponde al docente hacer que los conocimientos que se han construido inicialmente contextualizados en relación con algunos problemas puedan ser, en cierta medida en estas instancias de discusión, descontextualizados y generalizables. Las discusiones tienen un papel muy

1. ERMEL: equipo de didáctica de la matemática, perteneciente al Institut National de Recherche Pédagogique, Francia.

importante en este desprendimiento de los procedimientos y conocimientos de aquellas situaciones en las cuales surgieron.²

3. MOMENTOS DE DISCUSIÓN Y CONCEPCIÓN DIDÁCTICA

"Cuando les propongo a mis alumnos que comparen los resultados que obtuvieron luego de resolver un problema, la mayoría rápidamente comprueba que lo tiene bien y los que no... bueno, ya sabemos, son los mismos de siempre..."

Daniela, maestra de tercer año.

"Yo sí los hago trabajar en grupo porque todos algo siempre aprenden."

Natalia, maestra de segundo año.

Proponer que los alumnos de una clase discutan e intercambien ideas no es una novedad en educación. Sin embargo, para muchos docentes la organización de momentos particulares en los que se discuta acerca de contenidos específicos es dificultosa. Otras veces, y tal vez desconociendo o dudando de su importancia para lograr la evolución de los conocimientos, estos momentos quedan abandonados a "sólo unos minutos y de vez en cuando". En ambas circunstancias, el sentido último de las situaciones de discusión entre los alumnos permanece difuso. No se trata, adelantamos, de una habilidad personal de algunos docentes para conducir de determinada manera una clase. Consideraremos la propuesta de organizar momentos de discusión, confrontación y reflexión en la enseñanza de la matemática desde un determinado enfoque, una concepción de la didáctica de la matemática caracterizada, entre otras cosas, por el tipo de trabajo en relación con la resolución de problemas y la reflexión acerca de lo realizado (véase el capítulo 1, en este mismo volumen).

En el campo del aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina constantemente se ha destacado la importancia de la resolución de problemas. Sin embargo, la función que se les ha adjudicado no siempre ha sido la misma. En la

2. Ninguna discusión abarca exhaustivamente todos estos aspectos. Como veremos en los ejemplos, una discusión puede asumir algunos de ellos, de acuerdo con los objetivos de enseñanza.

versión más generalizada, son considerados como momentos propicios para la "aplicación" de aquellos conocimientos recientemente enseñados: aparece así en escena el famoso "problema tipo" que, si bien frente a las críticas recibidas ha variado en su formulación, no lo ha hecho en cuanto a su función en la enseñanza. Otras veces, el problema aparece como motivación e introducción de un "tema" que el docente explica a sus alumnos. Desde otras concepciones se supone también que la resolución de problemas por sí sola genera automáticamente aprendizaje matemático, poniendo en juego y desarrollando habilidades lógicas y matemáticas involucradas en los procesos de resolución. Ninguna de estas posiciones corresponde al modo como nosotros entendemos el lugar de los problemas en el corazón del aprendizaje matemático.

Por otro lado, frecuentemente se señala que los alumnos no saben resolver problemas. Así lo testimonian las preguntas acerca de la operación a realizar que formulan frente a un enunciado: "¿es de más?", "¿qué cuenta hay que hacer?", "¿hay que dividir?". Estas preguntas surgen especialmente cuando faltan las palabras clave que "dan pistas" o sugieren la operación a realizar. Encontramos así una escena reiterada en el aula: los alumnos saben "hacer las cuentas" pero no reconocen en qué situaciones es pertinente utilizarlas. Un ejemplo de esto último es cuando "conocen" algunas tablas de multiplicar, pero no reconocen las situaciones en las cuales la multiplicación puede ser el camino para su solución. En definitiva, esos conocimientos permanecen vacíos de sentido en tanto no constituyen herramientas movilizables para resolver problemas.³

Desde la concepción didáctica que adoptamos aquí, se destaca que lo esencial en el aprendizaje de la matemática es construir *el sentido de los conocimientos* y que la resolución de problemas es una actividad ineludible para ello. Los problemas aparecen, pues, como el medio fundamental para la enseñanza de un concepto. Pero no se trata de cualquier problema sino de aquellos a los cuales responden los contenidos que se quieren transmitir. A través de ellos, los alumnos construyen sus conocimientos, puesto que promueven actividades de búsqueda donde se ponen en juego los conocimientos ya construidos adaptándolos como herramientas de solución

3. En varios capítulos de este volumen podrán encontrarse referencias al "sentido" de los conocimientos y cómo muchas veces la enseñanza usual no logra que los alumnos vinculen los contenidos matemáticos con aquellas situaciones en las cuales funcionan como medios de solución.

para esa nueva situación. Esto constituye un cambio de enfoque radical, ya que la resolución de problemas no se reduce al momento de la "aplicación" de lo previamente "enseñado" (cuentas, fórmulas, procedimientos de medición, de construcción de figuras, etcétera).

En ese sentido, Charnay (1994) afirma que la actividad debe proponer un verdadero problema por resolver, debe permitir utilizar los conocimientos anteriores y, al mismo tiempo, ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar esos conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a conocer sus límites, a elaborar nuevos.

Desde esta perspectiva se proponen distintos problemas buscando ampliar el sentido de un concepto. Otros problemas pueden presentarse para sistematizar determinados conocimientos y también, por qué no, para ejercitarlos —ejercitación que se realiza comprendiendo qué se hace y por qué se lo hace—. Encontramos aquí una de las diferencias con la idea de "aplicación" que hemos señalado, ya que cada nuevo problema brinda la oportunidad de enriquecer el significado de lo aprendido.

- a) Juan tenía 5 figuritas y ganó 7. ¿Cuántas tiene ahora?
- b) Juan tenía algunas figuritas y perdió 5. Ahora tiene 7. ¿Cuántas tenía antes?

Estos enunciados se ubican en el amplio campo de los problemas aditivos que Vergnaud (1979, 1986) nos enseñó a distinguir. Probablemente los alumnos muy pequeños puedan resolver el primero, pero duden al intentar resolver el segundo —aun cuando convencionalmente se resuelva con el mismo cálculo— o, acostumbrados "a buscar pistas" en el enunciado para descubrir la operación que deben hacer, consideren la palabra "perdió" y realicen una resta. ¿Podemos afirmar entonces que los alumnos que resuelven el primero saben sumar? Si saben resolver el primero, ¿es suficiente entonces brindarles más ejercitación sobre lo mismo para que "afiancen" el concepto? Lo que queremos rescatar es que no alcanza con saber desplegar algún procedimiento de suma, ni basta con poder resolver un conjunto restringido de problemas. Es necesario trabajar sobre la amplia gama de situaciones que un concepto permite resolver.

Ahora bien, si resolver problemas es una condición necesaria para aprender matemática, no es para nada suficiente. *El aprendizaje matemático*, como ya mencionamos, *se basa en la resolución de problemas y la reflexión acerca de lo realizado*: los procedimientos empleados, los conocimientos involu-

crados deben convertirse en objeto de reflexión. Los intercambios con los compañeros y el docente son aquí cruciales: es decir, las explicitaciones, las confrontaciones y las justificaciones entre los alumnos constituyen un factor de progreso para todos. Permiten ir construyendo el camino que los llevará a validar el trabajo que se hace. Esta actividad reflexiva enriquecerá, recíprocamente, las futuras resoluciones de todos los alumnos.

Colocar a la resolución y reflexión en torno a problemas en el centro del aprendizaje y la enseñanza de la matemática no implica en absoluto "borrar" el papel del maestro en esta actividad. Nada más lejos de ello. Su participación es altamente determinante. Como lo veremos "en vivo" en los ejemplos que analizaremos más adelante, los momentos de discusión requieren también de una participación activa del docente, que no se limita sólo a proponerlos: debe conducirlos y para ello —como ya mencionamos— es necesaria una intervención que incite a los niños a explicitar lo realizado, aceptando todas las respuestas sin validar de entrada la correcta, retomando para todo el grupo lo que dicen algunos alumnos, planteando contraejemplos, ayudando a establecer acuerdos, recordando acuerdos anteriores en relación con los conocimientos, etcétera.

En síntesis, los niños construyen los conocimientos partiendo de su uso frente a problemas y la reflexión en torno a ellos; la organización sistemática de instancias de discusión en la clase ocupa un lugar insustituible en este proceso.

4. ¿POR QUÉ LAS DISCUSIONES GENERAN PROGRESOS? ALGUNAS RAZONES PSICOLÓGICAS Y DIDÁCTICAS

"Yo no propongo mucho trabajo en pequeños grupos, porque me doy cuenta de que aprender, no aprenden. Lo único que hacen, además de mucho barullo, es copiarse de los que más saben."

Laura, maestra de segundo año.

"Cuando les doy un problema, primero les pido que lo resuelvan solos, luego les pido que comparen con un compañero para que piensen y discutan por qué cada uno lo resolvió de esa manera y que juntos vean si hay acuerdo."

Cecilia, maestra de segundo año.

Hace ya muchos años que se reconoce la importancia de la interacción social entre los alumnos, el trabajo con "los otros". Uno de los modos más

habituales que asume en la enseñanza de la matemática es el trabajo en grupos, específicamente en el momento de la resolución de un problema.

Si bien ya era conocida su importancia y se recomendaba propiciar el trabajo grupal desde una dimensión educativa, es decir, independientemente de que se tratara o no de resolución de problemas, son los estudios de la psicología social genética⁴ los que han avanzado mostrando los efectos positivos de la cooperación en la búsqueda común de la solución a un problema.

La situación de *resolución conjunta* entre alumnos es positiva porque facilita coelaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado. Este proceso requiere tener en cuenta lo que dicen otros compañeros, las sugerencias que hacen, explicitar y justificar las elecciones, provocando intercambios cuya riqueza radica en que posibilitan tomar conciencia sobre algún aspecto no considerado del problema, reformularlo, descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, etcétera.

A pesar de su riqueza, a la hora de implementar en el aula la solución conjunta de problemas —que no es la única manera de propiciar la interacción social—, se presentan limitaciones tales como que alguno de los alumnos del grupo asuma "la dirección de la solución" y los demás lo acepten —tal vez por su "fama de bueno en matemática"—, pero sin poder reutilizarlo por su propia cuenta en otra situación,⁵ o que algún participante, sin esgrimir argumentos del orden matemático, esté sistemáticamente en desacuerdo con las propuestas de los otros. Por otro lado, los docentes no pueden llegar a conocer la mayor parte de las argumentaciones que esgrimen los alumnos en los pequeños grupos. Estas dificultades son salvables

4. Gilly (1988) reconoce dentro de esta línea dos corrientes: "La primera corriente, llamada de psicología social genética [...] se interesa en el rol de las interacciones sociales entre pares en el desarrollo de la inteligencia en general, referida a la teoría estructuralista piagetiana. La segunda corriente [...] se diferencia de la precedente en su interés por la construcción de competencias limitadas a clases de problemas y la referencia a la perspectiva procedimental adoptada en resolución de problemas".

5. En la vida del aula es difícil controlar esta situación ya que los alumnos reconocen y confían en el que más sabe y pueden llegar a desechar su propia estrategia aun cuando sea acertada. En ese sentido, la propuesta de la segunda maestra del epígrafe de este apartado es una alternativa interesante para resolver, en parte, esta limitación.

desde la organización y conducción de las situaciones de enseñanza y no anulan el carácter productivo de las interacciones.

Ahora bien, en nuestro caso en particular, no estamos enfocando el trabajo de resolución en pequeños grupos sino las puestas en común y las discusiones que deben originar, y si bien estos momentos se organizan para cumplir diferentes funciones, comparten algunos principios en cuanto a los beneficios de la interacción en el aprendizaje, ya que tienen como dimensión transversal el tratarse de momentos de intercambio, explicitación y debate que, como afirma el grupo ERMEL (1995), constituyen un "potente incentivo de progreso en el aprendizaje".

Existen, además, razones de orden estrictamente *didáctico* para propiciar los momentos de discusión de toda la clase. Aquí es necesario referirnos a la *teoría de las situaciones didácticas* elaborada por Guy Brousseau (1986, 1994), que propone asociar los conocimientos matemáticos a distintos tipos de situaciones susceptibles de hacer funcionar diferentes dinámicas sociales. Mencionemos brevemente que las situaciones concebidas para hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos se denominan situaciones a-didácticas. Están constituidas por problemas a los cuales son confrontados los alumnos y la organización de estas situaciones permite la evolución de sus conocimientos matemáticos. La denominación de a-didácticas responde a que desaparece de ellas —momentánea y aparentemente— la intencionalidad didáctica. Es el alumno, y no el maestro, quien pone en escena al conocimiento en función de los requerimientos de la situación.

Estos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerlo actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer (Brousseau, 1986).

Las diferentes situaciones a-didácticas elaboradas por Brousseau tienen relación, por una parte, con la idea de propiciar un trabajo autónomo del alumno —que le permitirá construir su propio conocimiento— y, por otro lado, se vinculan con los diferentes *status* de un concepto matemático. Nuestro autor distingue diferentes clases de situaciones a-didácticas ligadas a los diferentes niveles de sentido de los conocimientos: de acción, de formula-

ción y de validación, de acuerdo con las interacciones del sujeto con el medio, la función que cumpla en ellas el saber al que se apunta (uso, representación, demostración), etcétera.

Para que los alumnos puedan evolucionar en sus conocimientos es necesario, entonces, que *actúen* para resolver problemas (situaciones de acción), es decir, que las situaciones propuestas provoquen la elaboración y la puesta en funcionamiento de conocimientos implícitos; que los *puedan explicitar*, que los *expresen en un lenguaje* comprendido por todos (situaciones de formulación) y que *validen* su utilización por medio de pruebas (situaciones de validación).

Ahora bien, Laborde (1991) afirma que

[...] son finalidades de tipo social las que permiten el pasaje de una fase de acción a una fase de formulación y de esta última a una fase de validación. La puesta en acción de una finalidad de tipo social es el instrumento utilizado aquí para modificar la significación de los conocimientos en los alumnos.

Vemos de esta manera que estas situaciones están en gran parte determinadas por las interacciones sociales que las constituyen. En este sentido, encontramos que las situaciones de formulación y de validación requieren "un otro" (real o hipotético) a quien se destina la producción. En las situaciones de formulación se requiere la expresión de informaciones pertinentes en un lenguaje o código que el niño conoce o crea. El lenguaje simbólico sirve, entonces, para expresar informaciones en situaciones que justifican su empleo. Tales situaciones contribuyen, por otra parte, a *volver explícitos modelos* que los niños utilizan en la resolución de los problemas.

Las situaciones de validación, por otro lado, dan lugar a debates entre alumnos que, organizados por el docente, posibilitan que se expliciten y se argumente sobre lo realizado; constituyen, de esta manera, un medio para establecer pruebas o refutarlas. Se trata, como dice Balacheff (1982) citando a Piaget, de extraer las "razones" para "responder a la cuestión del por qué". Según esta teoría, entonces, las situaciones a-didácticas hacen jugar diversas modalidades socio-interactivas —no siempre ni necesariamente conflictivas—, que entran en escena en situaciones de aprendizaje específicamente organizadas y necesariamente vinculadas con distintos aspectos de los saberes matemáticos. Es decir, las interacciones sociales están in-

cluidas en el estudio del funcionamiento del aprendizaje matemático en situación de clase.

Para que los efectos de estas interacciones sean benéficos, las participaciones de los alumnos deben cumplir con ciertas características, tales como que comprometan sus propias convicciones, expliciten sus puntos de vista acerca del problema considerado, ofrezcan explicaciones de los procedimientos realizados, utilicen un lenguaje comprensible, esgriman argumentaciones de orden matemático y no simplemente opiniones. Todo ello implica, por otra parte, una toma de distancia y una actitud reflexiva en relación con los conocimientos individuales. Estos intercambios obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de posibilidades hasta llegar, a veces, a perturbar la propia posición.

Trajimos aquí estas investigaciones porque sus resultados nos permiten comprender por qué los momentos de explicitación, justificación y debate en las aulas son tan propicios para generar avances en los conocimientos de nuestros alumnos. Aun cuando no se trabaje con situaciones didácticas en el sentido fuerte en que las define Brousseau, las instancias de discusión posibilitan momentos de reflexión conjunta en la clase a propósito de lo realizado. Sin embargo, sí nos parece condición que los alumnos hayan enfrentado previamente la tarea de manera relativamente autónoma; de lo contrario, ¿sobre qué se discutiría si no hubiera una resolución de los alumnos por sí mismos?

5. ¿CÓMO ORGANIZAR MOMENTOS DE DISCUSIÓN EN LAS AULAS?

"Al principio, cada vez que un alumno participaba, los chicos esperaban que yo indicara si estaba bien o mal."

Alejandra, maestra de segundo año.

No es posible definir un modo general de organizar estos espacios válidos para todas las ocasiones, porque los momentos de discusión dependen, entre otras cosas, de los diferentes objetivos de enseñanza, del contenido matemático en cuestión y de los conocimientos de los alumnos. Optamos entonces por analizar fragmentos de registros de clases de primer ciclo de

la EGB, centrándonos en algunas condiciones didácticas de las discusiones en el aula, en particular en relación con las intervenciones del maestro. Presentaremos cuatro ejemplos: los dos primeros corresponden a diferentes problemas aditivos en distintos contextos didácticos; el tercero, a un problema de división, y el último, a una búsqueda de diferentes maneras de resolver una suma.⁶

5.1. Primera situación: resolución de problemas aditivos

Contexto didáctico

La primera situación corresponde a un segundo año en el que la maestra está comenzando a instalar en sus clases de matemática un nuevo modo de funcionamiento vinculado al enfoque didáctico que desarrollamos anteriormente, en particular en relación con la resolución de problemas. Está llevando a sus alumnos a que, frente a los problemas que se les plantean, desarrollen un cierto trabajo autónomo. Esto es, que se enfrenten al desafío de resolverlos poniendo en juego los conocimientos de que disponen, sabiendo que ello no implica necesariamente aplicar una determinada operación, sino que es legítimo y necesario propiciar la búsqueda de diversos caminos personales de resolución, probando, equivocándose, ajustando sus procedimientos, controlando los pasos que van dando. Se trata de un trabajo donde el docente no es el único que establece si es correcto o incorrecto lo que hace el alumno.

La maestra propone entonces a sus alumnos el siguiente problema:

En 2° A hay 27 alumnos y en 2° C hay 18. ¿Cuántos alumnos más que en 2° C hay en 2° A?

La maestra eligió este problema porque consideró importante ampliar el campo de los problemas de sumas y restas que venían trabajando sus alum-

6. Agradecemos a las docentes Antonia Bertolino, Cecilia Briano, Mariana Florio, Cecilia Giudice, Mariángela Spataro y Gabriela Spósito, y a las siguientes instituciones: Escuela N° 69 de Gregorio de Laferrere, Provincia de Buenos Aires; Colegio Numen e Instituto Valle Grande de la Ciudad de Buenos Aires.

nos. Sabía que los problemas de comparación, referidos a una diferencia entre dos medidas (en nuestro ejemplo, la cantidad de alumnos de cada grado), ofrecen ciertas dificultades para los niños pequeños y que era necesario iniciar su enseñanza. Al planificar la clase, había anticipado –inspirándose en estudios didácticos– cuáles eran las resoluciones posibles para este problema:

- Hacer una resta ($27 - 18$) corresponde a la solución canónica. Sin embargo, no es esperable que los alumnos vinculen de entrada este problema con una resta dado que el enunciado no menciona la disminución de alguna cantidad.
- Contar hacia atrás desde 27 hasta 18, controlando –con los dedos, marcas en el papel, etcétera– la cantidad de números que se dicen: 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18.
- Calcular el complemento de 18 a 27 mediante una suma: $18 + \dots = 27$, o contando desde 18 hasta 27.
- En el caso de utilizar el conteo, algunos alumnos pueden recurrir a una representación gráfica dibujando ambas colecciones –o sólo la más numerosa– y compararlas, estableciendo sobre la más numerosa hasta dónde son equivalentes y cuál es la diferencia entre ambas.

Estas anticipaciones permiten al docente una planificación de su clase que, por cierto, podrá corresponderse en mayor o menor medida con la realidad, y se irá ajustando en su desarrollo de acuerdo con lo que suceda efectivamente en el aula. Son previsiones que permiten tomar conciencia de que no existe una única manera de resolver un problema –la canónica–, conocer la variedad de caminos posibles para hacerlo, comprender qué es lo que hacen los niños cuando despliegan procedimientos personales y anticipar cómo intervenir.

En la organización de la discusión, estas previsiones permiten establecer los ejes en torno de los cuales se intentará hacerla girar, así como elaborar intervenciones posibles para las diferentes cuestiones que pudieran aparecer. Esto no significa que algunas de las intervenciones reales de la clase no se gesten a partir de lo que surge en su desarrollo, pero este trabajo siempre será más rico si el maestro cuenta con todo un respaldo de

posibilidades para orientar su clase en dirección hacia lo que se trata de enseñar.

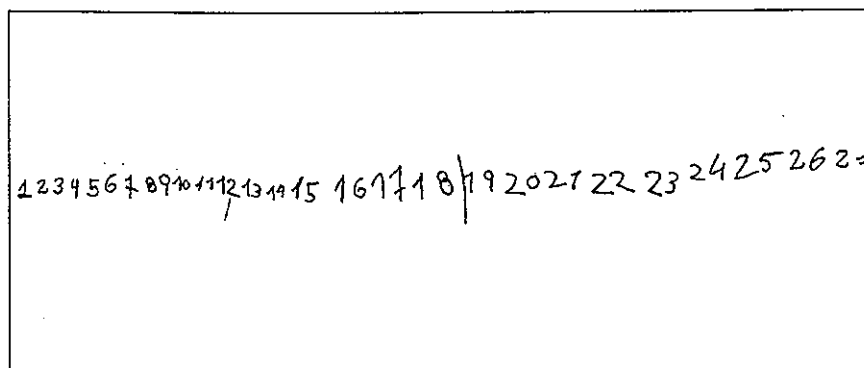
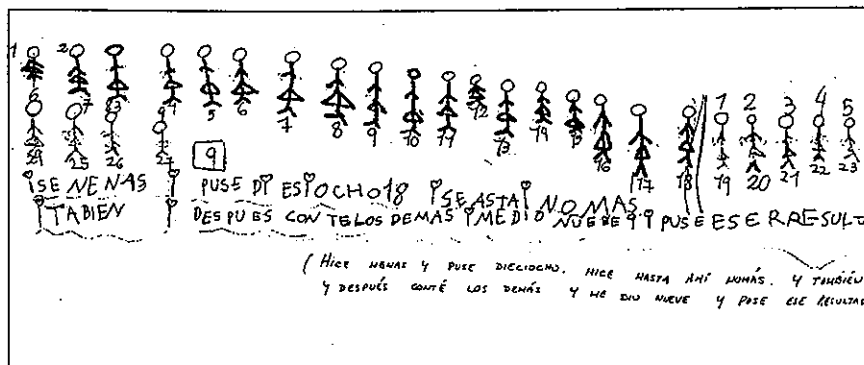
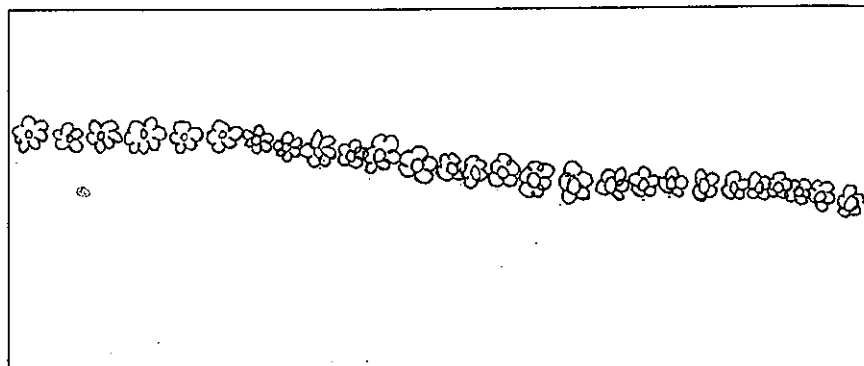
Desarrollo de la situación

Volviendo al problema presentado en este segundo año, la maestra copia el enunciado en el pizarrón, lo lee en voz alta y dedica unos instantes a comentar de qué se trata, si hay algo que no se entiende, etcétera. Luego aclara que hay diferentes maneras de buscar la respuesta, que cada uno puede hacerlo como le parezca y que anoten lo que necesiten para resolverlo en las hojas que se acababan de repartir.

Mientras los alumnos resuelven, la maestra recorre los bancos mirando cómo lo hacen, respondiendo dudas, cuidando siempre de no sugerir o indicar el procedimiento a utilizar, y seleccionando los procedimientos que se discutirán luego. Cuando los alumnos se acercan a preguntarle si está bien lo que hicieron o cómo hacerlo, les responde, por ejemplo: “Ahora cada uno lo resuelve como le parece, después lo vamos a conversar entre todos”. Esto es importante porque se trata de un momento en el cual los docentes, habitualmente, dan muchas indicaciones para que los alumnos realicen “lo correcto”.

En muchos de los procedimientos que aparecieron, los niños apelaron a representaciones gráficas: dibujaron la colección mayor marcando de alguna manera (señalando, tachando, etcétera) sobre ella hasta dónde era equivalente a la otra y contando a partir de allí la diferencia. Otro procedimiento, similar al anterior, consistió en escribir la serie de los números hasta 27 y, sobre ella, contar la cantidad de números desde 18 a 27, o hacerlo directamente sobre la banda numérica.⁷

7. Se trata de una serie de números escritos en forma alineada, cuya extensión puede ir prolongándose progresivamente de acuerdo con las necesidades, dispuesta en la clase para todos los alumnos, como una fuente más de información (véase el capítulo 3 en este mismo volumen).



Algunos alumnos no podían desplegar ningún procedimiento para comenzar a resolver este problema. Entre ellos, algunos entendían que se les estaba preguntando cuál era el grado más numeroso, algo común en relación con esta clase de problemas. En su recorrida entre los bancos, al advertir estos bloqueos, la maestra les proponía la misma situación pero con números mucho más pequeños, 3 y 5 por ejemplo. Algunos pudieron iniciar así una búsqueda, otros no. La discusión grupal será luego una instancia en la que podrán advertir la existencia de caminos de resolución que no llegaron a descubrir por sí solos.

La mayoría apeló a algún tipo de marca gráfica como apoyatura para poder contar y comparar la cantidad de alumnos de ambos grados. Queremos subrayar que se trata de apelaciones al dibujo por decisión propia de los alumnos. La maestra no les sugirió este procedimiento como tampoco ningún otro. Sólo a algunos niños que no podían iniciar alguna resolución, les propuso: "¿No sabés qué hacer? Hacer un dibujo, ¿te ayudará a pensarlo?". Pero sólo lo hizo con el fin de que pudieran imaginarse de alguna manera la situación, no como condición previa a una resolución numérica. Ella sabe, tal como muestran las investigaciones actuales en didáctica de la matemática, que los procedimientos de resolución no se inician necesariamente con una representación gráfica ya que, al contrario de una idea bastante difundida, la resolución de los problemas no sigue necesariamente una progresión desde resoluciones concretas a representaciones gráficas y, finalmente, representaciones simbólicas.

Este contraste entre lo que la maestra había previsto y los procedimientos que de hecho aparecieron nos muestra cómo las planificaciones son bosquejos de clases, que luego se adaptan a lo que aparece sobre la marcha. En efecto, en este caso, no se presentaron procedimientos que recurrieran al cálculo sino basados en el conteo.⁸

Para observar lo que los alumnos hacían, la maestra eligió dos procedimientos que sometería a discusión: el de Daiana, que dibujó sólo la colección mayor y contó sobre ella la diferencia entre ambas colecciones, y el de Nerina, que se apoyó en la banda numérica. La puesta en común se centraría, por un lado, en la difusión del procedimiento consistente en apoyarse en la serie numérica, de modo tal que los alumnos que no lo habían utiliza-

8. La vinculación de esta clase de problemas y las operaciones será objeto de sucesivos trabajos por parte de la maestra.

do pudieran apropiarse de él, o al menos tomar conciencia de la existencia de otro procedimiento además del propio. Por otro lado, la maestra quería que los alumnos explicitaran o reflexionaran cómo se realizaba la comparación, qué parte de la colección mayor era equivalente a la menor y cómo se establecía, entonces, la diferencia entre ambas y en qué se distinguían los dos procedimientos seleccionados para realizar estas acciones. Cuando los alumnos terminaron de resolverlo, la maestra inició la puesta en común.

M.:⁹ Bueno, ahora vamos a conversar entre todos sobre lo que estuvimos haciendo. Daiana, ¿quieres contarles a los chicos cómo lo pensaste? Vení con tu hoja, hacelo bien grande acá en el pizarrón para que todos lo vean y contales cómo lo averiguaste.

Daiana: Yo puse todas las flores y después...

M.: Hacé lo que hiciste, Daiana.

Daiana le pide a su maestra que lo realice en el pizarrón.

M.: (Comienza a dibujar una fila de flores en el pizarrón). ¿Vieron que algunos pusieron palitos? Bueno, ella, en vez de palitos, puso flores. Por cada alumno hizo una flor, entonces puso todos los alumnos que había en 2° A. ¿Cuántos eran los de 2° A?

Varios alumnos afirman que eran veintisiete.

M.: Bueno, a ver, fíjense si no me equivoco. (Continúa dibujando la fila de flores mientras los alumnos cuentan en voz alta). Y después, Daiana, ¿qué hiciste? Contales.

Daiana: Después conté cuántos había en el otro.

M.: ¿Cuántos había en el otro grado?

Alumnos: Dieciocho.

M.: Contó dieciocho ¿Me ayudan?

Alumnos: Sí. (Cuentan a medida que la maestra señala.)

M.: ¿Por qué habrá contado acá dieciocho?

A.: Son los de 2° C; los otros tiene de más.

A.: Y le quedan nueve.

A.: Contó los que le quedaron.

M.: Claro, contó los que le quedaron, ¿sí? ¿Cuántos le quedan acá?

A.: Nueve.

M.: Le quedaban nueve. Así averiguó cuántos alumnos más había en 2°

9. En los registros de clase, se utilizará "M." para "maestra" y "A." para "alumno".

A que en 2° C. Hubo varios que usaron esta manera de averiguarlo, ¿no? Algunos en vez de flores hicieron corazones; otros, palitos por cada nene. Otros, ¿saben qué hacían? En lugar de contar solamente los 18 de 2° C, los iban tachando. (Hace gesto de tachar algunas de las flores que estaban dibujadas en el pizarrón.) Ahora yo les quiero preguntar algo, ¿qué tienen de parecido estas formas de resolverlo?

A.: Los veintisiete.

M.: Los veintisiete, ¿qué eran?

A.: Los alumnos de 2° A.

M.: ¿Y cómo hacían para averiguar cuántos alumnos más que en 2° C hay en 2° A?

Algunos alumnos responden que contando, otros tachando.

M.: ¿Qué es lo que contaban o tachaban?

A.: Dieciocho alumnos.

A.: Los de 2° C.

M.: De 2° C. ¿Saben una cosa? Yo no entiendo cómo, si eran de 2° C, los marcaron acá donde estaban estos 27 que son los de 2° A.

A.: De 2° A quiso sacar 18 de 2° C, para ver cuántos le quedaban. Los que te sobran son los que te da.

Hernán: Porque hasta acá (haciendo una marca en la 18ª flor) eran iguales los dos grados.

M.: Ah, Hernán dice que hasta acá eran iguales los dos grados, que tenían la misma cantidad de alumnos. ¿Y éstos? (Señala los restantes.)

A.: Nueve, contás los que te quedaron.

A.: Los que tiene de más, los que no son iguales.

M.: Otros lo resolvieron de otra manera. Por ejemplo, Nerina, contales a los chicos cómo lo resolviste.

Nerina: (Se acerca a la banda numérica.) Del dieciocho salí hasta el veintisiete y me dio diez porque yo conté el dieciocho. Cuando no lo conté me dio nueve. Acá, desde dieciocho puse la mano acá (apoya la mano en el 18 de la banda numérica).

Laura: Señó, ¿contó lo de adentro o lo de afuera?

M.: Nerina, Laura quiere saber si contaste los de adentro o los de afuera. ¿Los de adentro de dónde querés decir, Laura?

Laura: Del otro número (señala entre el 1 y el 18).

Nerina: ¡No! ¡Yo conté éstos! (Señala los números entre el 18 y el 27.) Yo no conté ni éstos (señala los números del 1 al 18 en la banda numérica)

ni éstos (señala los números del 27 en adelante sobre la misma banda); *conté éstos* (vuelve a marcar los números entre el 18 y el 27).

M.: Y éstos, ¿por qué no los habrá contado? (Señala los números hasta el 18.)

A.: Porque te da más, te da uno, dos, tres, ... diecisiete y entonces como acá había nueve tenía que llegar hasta acá.

M.: Pero antes de resolverlo no sabíamos que la respuesta era nueve, podía ser más o menos.

Pablo: Yo sí conté éstos y después los saqué. Cuando terminé de contar hasta acá (señala el 18), *conté esto* (señala los números del 19 al 27).

M.: Pablo hizo veintisiete palitos. Y él dice que sí contó los primeros dieciocho y los tachó y después contó el resto. Es algo parecido a lo que había hecho Daiana, ahí sí tuvimos que contar los dieciocho para saber hasta dónde había igual de alumnos que en 2° C. Y como lo hizo Nerina, ¿era necesario que contara estos dieciocho? ¿Por qué les parece que habrá empezado acá en el diecinueve y no volvió a contar estos de acá?

A.: No volvió a contarlos otra vez porque me parece que ya sabía que ahí había dieciocho.

M.: Los chicos dicen que ahí, donde están los números escritos, ya saben que hay dieciocho, que no necesitan contarlos. ¿Están todos de acuerdo?

Algunos alumnos: Sí.

M.: ¿Qué hay de parecido y de diferente entre esta manera de averiguarlo y esta otra? (Señala la resolución de Daiana sobre el pizarrón y la banda numérica sobre la cual Nerina explicó la suya.)

A.: Los veintisiete y los dieciocho.

M.: ¿Vos querés decir que en los dos están los veintisiete y los dieciocho?

A.: Los de 2° A y 2° C.

M.: Pero yo en éste (señala la fila de flores sobre el pizarrón) no veo los números.

A.: No, los números no, las flores, que son alumnos.

A.: Pero ahí (mira la banda) sí están los números. Por eso no había que contar los de adentro.

M.: Ustedes están diciendo que en los dos están representados de alguna manera los veintisiete y los dieciocho: en uno con flores, palitos u otras marcas; en el otro, con números. Y cuando usaron los números no hizo fal-

ta contar hasta el dieciocho porque ya sabían que ahí había dieciocho. Entonces sólo tenían que contar los que había de más. Muy bien, chicos, ¡cómo trabajaron! Vimos que hay distintas maneras de resolver estos problemas. Otro día vamos a seguir trabajando y conversando entre todos con otros problemas...

Como podemos observar, la discusión se centró en la explicitación, el análisis y la comparación de los procedimientos seleccionados.

La maestra realiza —como veremos también en los ejemplos siguientes— una selección de lo que propondrá para la discusión. No se trata de que cada alumno pase y cuente cómo lo resolvió. Esto haría la clase muy tediosa y escuchar interminables relatos de lo mismo no aportaría al objetivo perseguido.

Una dificultad que se suele presentar cuando los alumnos exponen sus procedimientos es que se dirijan al docente y no a sus compañeros. Es necesario pedirles que hablen para toda la clase, que escriban grande para que todos lo vean, como así también adelantarles a los demás que van a tratar de entender cómo lo pensó determinado alumno, que si hay algo que no entienden o con lo que no están de acuerdo, levanten la mano para preguntarle o decirle, etcétera.

La maestra formula preguntas que constituyen para sus alumnos nuevos problemas en relación con la resolución que están analizando. Sus intervenciones consisten en proponer problemas o preguntas; repetir o reformular algo dicho por un alumno para hacerlo audible o comprensible para todos; repreguntar en el caso de que esto no surja del mismo grupo; recordar cuestiones que hayan surgido en momentos previos de la clase; hacer síntesis parciales o de cierre (momentáneo) de lo que se haya dicho o avanzado en la discusión, etcétera.

Como mencionamos, esta clase era una primera aproximación a uno de los problemas aditivos, consistente en establecer la relación cuantitativa entre dos medidas, con el objetivo de comenzar a instalar este tipo de intercambios entre toda la clase. Por lo tanto, sólo se pretendía abrir el juego para que los alumnos pudieran poner en práctica sus propios procedimientos. Se avanzó un poco también en la explicitación, justificación y análisis de esos procedimientos.

¿Cómo continuar a partir de aquí el trabajo con estos problemas? Se vuelven a proponer problemas similares y otros del campo aditivo, para

darles la ocasión de reutilizar los avances producidos gracias a las reflexiones que tuvieron lugar en la discusión. Una posibilidad para conducir a los alumnos hacia la utilización de procedimientos numéricos es, en futuras ocasiones, sugerirles de entrada que intenten una solución usando números. También será necesario proponer la misma estructura con números mayores y distantes entre sí para desalentar la utilización del conteo tratando de establecer relaciones con el cálculo.

5.2. Segunda situación: resolución de otros problemas aditivos

Contexto didáctico

La segunda situación que presentamos también se desarrolla en un segundo año pero, a diferencia de la anterior, los alumnos ya están transitando esta modalidad de trabajo desde el inicio de su escolaridad. La maestra propone a sus alumnos resolver individualmente el siguiente problema:

En esta caja ya hay cubos. Pongo 12 más. Ahora hay 25, ¿cuántos había al principio?

Es otro de los problemas que corresponde al amplio campo de los problemas aditivos. Involucra una transformación que vincula un estado inicial con un estado final.¹⁰ Aquí se trata de averiguar el estado inicial. Convencionalmente se resuelve restando al total de cubos (25), los que se agregaron (12) para saber cuántos cubos había inicialmente en la caja. Sin embargo, la maestra no les adelanta ni espera que todos sus alumnos efectúen una resta; sabe que, desplegando procedimientos propios, ellos cuentan con posibilidades de resolverlo. Para este grupo de alumnos no es una novedad trabajar de esta manera, están acostumbrados a que se acepten distintos modos de resolución del mismo problema y que puedan probar, ensayar, hacer borradores y también equivocarse.

10. Esta caracterización del problema corresponde a la clasificación de problemas aditivos de Gérard Vergnaud (1991). También podrá encontrarse una referencia a ella en Broitman (1999).

Los procedimientos de resolución numérica no convencionales posibles para resolver este tipo de problemas son: a través de la búsqueda del *complemento*,¹¹ es decir, ir añadiendo a la cantidad que se agrega más elementos hasta alcanzar el total, o tanteando con un *estado inicial hipotético*, es decir, anticipando un número posible e ir controlando si, sumado a la cantidad que se agrega, se obtiene la cantidad total de cubos. Los chicos de este grupo, aunque sería una estrategia de resolución posible, no utilizaron aquí el dibujo.⁴

Cuando algunos de ellos preguntan cómo se hace, la maestra responde que lo pueden resolver como cada uno lo piense, pero que es importante que anoten en el papel cómo lo hacen. Pedirles que anoten, es decir, que realicen una producción escrita, es importante por varias razones, entre ellas porque contribuye a organizar las ideas y también porque las ideas escritas perduran y, si la resolución les ha llevado mucho tiempo, puede posponerse la discusión para otro momento.

Desarrollo de la situación

Como lo mencionamos en la situación anterior, mientras los chicos resuelven el problema, la maestra pasa por sus bancos observando qué es lo que hacen. De esta manera, tiene una idea aproximada de los diferentes procedimientos empleados. ¿Por qué es aconsejable que la maestra conozca previamente los procedimientos de sus alumnos? Porque es en función de la producción de ellos que se intentará hacer evolucionar sus conocimientos hacia los contenidos que se quieren enseñar. Por otro lado, reiteramos, se seleccionarán los procedimientos a discutir de acuerdo con los aspectos que el docente desee trabajar. No se trata de que pasen al frente todos los alumnos convirtiendo los momentos de discusión en una tarea de presentación exhaustiva de procedimientos, como simple rutina, en los que los chicos estén más interesados en pasar que en comprender, defender, argumentar y discutir. Un cierto entrenamiento en este tipo de intercambio tal vez evite oír en las aulas: "Pero seño, yo no pasé". Otra alternativa es que la maestra recoja las producciones, las analice y decida cuáles van a ser discutidas por el grupo. De esta manera, podría favorecerse la "despersonalización" de la producción centrando la discusión en los procedimientos.

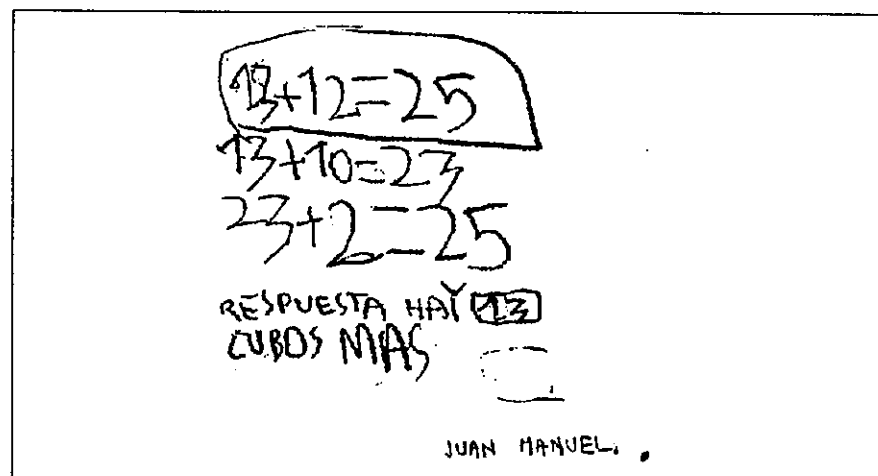
11. Se puede lograr a través del conteo, si las cantidades lo permiten, o realizando sumas parciales.

Una vez que la mayoría lo resolvió, la maestra propone analizar las maneras que encontraron de solucionarlo, para ello invita a pasar al frente a algunos chicos y también —como lo veremos más adelante— propone ella misma resoluciones de algunos niños para ser analizadas. Su objetivo es la difusión de diferentes procedimientos de resolución, inclusive la resta, si apareciera como un procedimiento más.

A continuación mostraremos las producciones seleccionadas por la docente.¹²

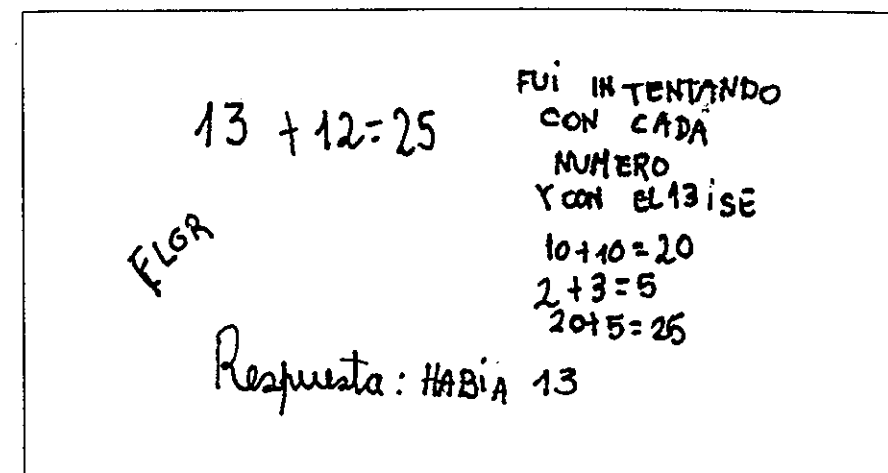
Producciones de los alumnos

Juan Manuel —como se puede observar en la ilustración— había escrito en su papel una suma y el desarrollo para obtener el resultado, pero no daba cuenta de la manera en que encontró el primero de los términos de la suma, justamente el que constituye la respuesta al problema, y esto resultaba interesante.



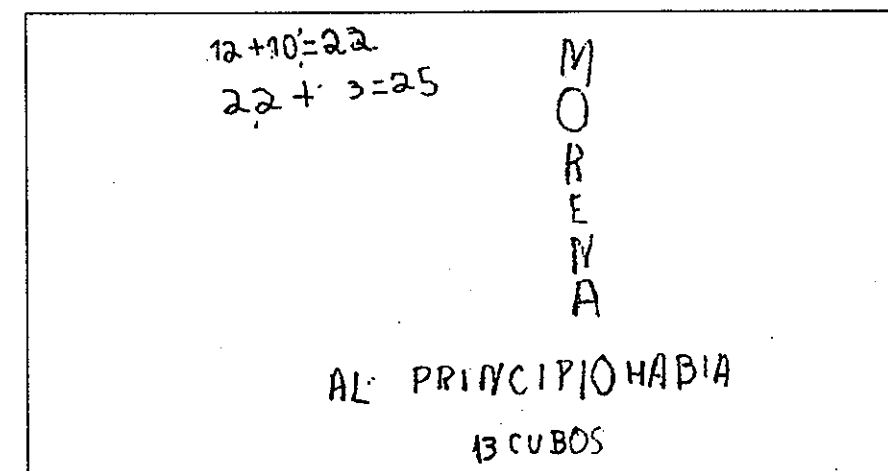
12. Creemos importante señalar, para comprender las producciones de los niños que presentaremos, que no se les había enseñado el algoritmo convencional, es decir que utilizaban procedimientos numéricos propios basados en la descomposición decimal de los números para resolver las operaciones.

También Flor desplegó una producción similar a la de Juan Manuel, sólo que ella explica cómo es que obtuvo el 13. En su hoja podemos leer:



Lo interesante era contrastar estas producciones porque, a pesar de que ambos emplean una suma con los mismos términos, no son iguales: Flor explicita cómo llegó al número 13.

Otros chicos también sumaron. La producción de Morena así lo testimonia:



Obsérvese que 13 es el resultado que Morena obtiene al ir aproximándose a 25 (número total de cubos) desde 12 (los cubos que se agregan) mediante sumas parciales. Es decir, para llegar a los cubos que ya había en la caja, Morena agrega primero 10 y luego 3, obteniendo *por complemento* el resultado esperado.

La maestra también sabía que otros chicos habían empleado sumas, pero lo que sumaban eran las dos cantidades que figuran en el enunciado del problema, realizando obviamente un procedimiento equivocado. Decide entonces que sería muy apropiado analizar con sus alumnos ambos tipos de sumas. Decide también que será ella quien presente estas últimas para no identificar al autor. Finalmente, someterá a la discusión grupal producciones como las de Juan Ignacio y Guido, en las que figura una resta.

$$\begin{array}{r} 25 - 12 - \\ 25 - 10 = 15 \\ 15 - 2 = 13 \end{array}$$

RESPUESTA
HABÍAN 13 CUBOS

JUAN IGNACIO

Como podemos observar en esta producción, su autor comienza escribiendo la operación a realizar que desarrolla abajo a través de restas parciales basadas en la descomposición decimal del sustraendo.

Transcribiremos a continuación fragmentos del registro de la clase.

M.: Bueno chicos, ahora vamos a ver las distintas maneras que encontraron de resolver el problema. Yo iba mirando cuando lo resolvían y me parece que es interesante que las compartamos. A ver Juan Manuel (J. M.), ¿querés contarnos cómo lo resolviste vos?

Juan Manuel pasa al frente y copia en el pizarrón sólo el cálculo que tenía escrito en su papel.

M.: Bueno, pero, ¿cuántos cubos había en la caja?

J. M.: Trece, pero no anoté la respuesta aquí. (Señala el pizarrón.)

Muchos chicos dicen que está bien, que antes había trece cubos.

M.: Pero yo no entiendo cómo hizo Juan Manuel para saber que eran trece.

J. M.: ¡¡Porque trece más doce es veinticinco!!

M.: De acuerdo, ¿pero cómo sabías que había que sumar trece?

J. M.: Ya lo dije...

M.: A ver, miren lo que hizo Flor. (Anota en el pizarrón el cálculo que había hecho Flor en su papel.) Ella también hizo trece más doce, pero aclara algo más, ¿querés leerlo Flor o contarnos de dónde sacaste el trece?

Flor: Yo hice igual que Juan Manuel.

M.: Sí, ¿pero cómo hiciste para saber que era trece lo que le tenías que sumar?

Flor: Porque fui pensando con otros números...

J. M.: ¡Ah! Yo también, yo sabía que era un número de los diez, porque si no me iba a pasar de veinticinco. Primero probé con el diecisiete y me dio otro número, después con el quince y me dio otro número y después me di cuenta de que podía ser con trece.

Lucas: Yo también lo pensé así, fui probando...

M.: ¿Y prueban con cualquier número?

Hablan varios chicos a la vez, dicen que no es cualquier número, que "te tenés que ir fijando más o menos cuál puede ser".

M.: A ver, Morena, ¿podrías contarnos cómo lo hiciste vos?

Morena: Yo no probé, yo fui agregando... porque yo sé que hasta el veinte, le tenía que agregar diez, ¿no? Y bueno... le agregué y me dio veintidós y ahí ya me di cuenta de que me faltaban tres. Yo no probé, fui poniendo.

M.: ¿Qué les parece a los demás?

Muchos chicos dicen que está bien, que Morena fue agregando "de a poco" el número que le tenía que sumar para llegar a veinticinco.

M.: Otros chicos también hicieron una suma. Miren, voy a anotar en el pizarrón lo que hicieron para ver qué les parece.

Anota la producción de una nena que suma $12 + 25$ y el desarrollo de la descomposición decimal que realiza para obtener el resultado:

$$20 + 10 = 30$$

$$30 + 2 + 5 = 37$$

Guido: ¡¡Pero tiene más de los que dice [el problema] que tiene!!

Morena: Si querés sumar, podés sumar, pero no todos... así tenés más de veinticinco...

J. M.: El número que le sumás lo tenés que pensar.

M.: ¿Qué habrá pensado el que lo hizo así?

Guido: Que tenía doce y le agregan veinticinco, pero eso no dice...

M.: A ver, ¿qué dice el problema?

Varios chicos afirman que el problema dice cuántos tenés al final, que no hay que sumar esos números, que hay que sumar los que uno piensa que ya hay en la caja.

M.: Ustedes dicen que ya sabemos cuántos tenemos después de agregar doce, tenemos veinticinco, o sea, que hay que buscar cuántos había al principio. Algunos chicos pensaron un número y probaban si al sumarlo a doce daba veinticinco, otros fueron agregando desde doce hasta llegar a veinticinco y ahí se daban cuenta de cuántos agregaron.

Morena: Sí, yo lo hice así.

M.: Sí, se puede pensar algún número y probar si nos puede acercar al resultado o ir agregando poco a poco, como hizo Morena, para llegar a veinticinco. Lo que vemos es que no se pueden sumar los dos números que dice el problema porque no se puso en la caja primero doce y después veinticinco.

J. M.: Se puede, pero ése es otro problema...

M.: De acuerdo, pero en éste no. Pero otros chicos hicieron una resta, miren chicos, así lo hicieron Juan Ignacio y Guido. (Escribe en el pizarrón la resta $25 - 12$ y el desarrollo para obtener el resultado.)

Morena: ¿Es de menos?

M.: ¿Querés decirnos, Guido, por qué hiciste una resta?

Guido: Como le puse cubos, no le podía seguir poniendo cubos. Para saber cuánto tenía antes, le tenía que sacar cubos como los que le puse porque si le agregaba cubos me iba a dar cada vez un total más grande de veinticinco.

M.: Él le sacó a los cubos que había en total, los cubos que le agregó para saber cuántos cubos había en un principio. (Algunos chicos dan la impresión de no seguir esta última explicación, otros se asombran de que se pueda resolver con una resta.) Entonces, este problema se puede resolver como lo hicieron Flor, Juan Manuel o Morena que fueron agregando poco a poco o probando con números distintos, o como lo que hicieron los chicos que restaron.

Analicemos este fragmento. Una primera cuestión, que en realidad constituye una condición didáctica necesaria ya mencionada en el ejemplo anterior, es que la maestra no aclare ni dé ninguna pista acerca del tipo de cálculo que resuelve este problema. En efecto, a diferencia de lo que habitualmente se cree, si así lo hiciera no estaría ayudando a sus alumnos. En otra situación similar, una vez planteado el problema y antes de la resolución, uno de los chicos dijo que "era de menos", afirmación que la maestra ratificó. La mayoría de los chicos resolvió el problema empleando una resta, aunque luego no pudieron justificarla. A veces no se trata de que el docente dé directamente la información; en efecto, validar de entrada el procedimiento que uno de sus alumnos sugiere en voz alta funciona como una pista de lo que el docente espera que hagan todos. Evitar dar estas "pistas" es una condición para todas las situaciones en que se quiera que los alumnos desplieguen procedimientos de resolución propios, desarrollen modos de pensamiento acordes con los problemas planteados y en las que realmente cobren sentido los momentos de discusión.

Veamos ahora las intervenciones del docente en este momento, aunque rescatamos que pueden ser válidas para otras situaciones.

- Expone o hace exponer algunas de las producciones de los alumnos sin realizar una presentación exhaustiva de todas. En principio, porque no se encuentran tantos procedimientos diferentes; como acabamos de ver, es posible agruparlos ya que algunos son semejantes. De esta manera, focaliza la atención de los alumnos sobre los aspectos que intenta trabajar y ubica las diferentes soluciones dentro de su especificidad.
- Presenta los procedimientos "buenos", los pertinentes para solucionar el problema y también los que no lo son, sin por ello convertir esta si-

tuación en un momento de corrección.¹³ No señala los equivocados como tales, sino que propone analizarlos y descubrir cómo lo habrán pensado sus autores. De esta manera, permitirá a sus autores modificar su punto de vista. Los "otros" brindan informaciones que pueden ayudar a elaborar una respuesta nueva y desechar las erróneas. Como veremos más adelante, el análisis de errores no está destinado a beneficiar sólo a quienes los produjeron sino a toda la clase.

- Reformula y hace síntesis parciales de lo que los alumnos van diciendo, para hacerlo comprensible para todos y, al mismo tiempo, centrar la discusión.
- En esta presentación tampoco señala algún procedimiento como "el mejor" o el "convencional". Ése no es el objetivo: comparar no es aquí sinónimo de elegir el mejor, sino la oportunidad de saber que es posible que existan otras respuestas diferentes de la propia y analizarlas.
- Pregunta cómo es que lo hicieron, ayudando de esta manera a tomar conciencia de lo que pensaron. Notemos que, en el inicio del registro, Juan Manuel afirma que sumó 13 porque si lo suma a 12 da 25. A pesar de la reiteración de la pregunta por parte de su maestra, su justificación no da cuenta de lo que pensó para llegar a obtener el 13. Es recién cuando otra compañera, indicada por la maestra, explica el procedimiento que consiste en ir intentando con distintos números¹⁴ que él puede retomar su procedimiento y justificarlo no sólo porque "la cuenta da". Para ello es fundamental que la maestra no cierre la posibilidad de continuar la discusión convalidando afirmaciones correctas de los alumnos, sino que también las ponga en duda. La maestra interviene para favorecer la toma de conciencia acerca de lo realizado, ya que en el momento de resolución prima "el hacer" y en los momentos de discusión se intenta volver explícitas "las razones del hacer".

Otra intervención posible es la de ofrecer escrituras a los procedimientos que relatan los alumnos cuando no han llegado a producirlos ellos mismos. Por ejemplo, cuando Juan Manuel relata cómo fue tanteando hasta llegar al número buscado, la maestra podría haber escrito los cálculos correspondientes en el pizarrón sirviendo de apoyatura para lo que sigue de la discusión.

13. Nos interesa diferenciar claramente estos momentos de discusión de los de corrección colectiva de la tarea. Aquí se trata de profundizar en el análisis de los conocimientos puestos en juego en las resoluciones.

14. Vergnaud (1979, 1991) denomina a este procedimiento *búsqueda de un estado inicial hipotético*.

5.3. Tercera situación: resolviendo un problema de división¹⁵

Contexto didáctico

Este ejemplo corresponde a una clase de tercer año de la EGB. La maestra está trabajando problemas de división. Su objetivo es hacer evolucionar los procedimientos de los alumnos en dirección al algoritmo de esta operación. Dentro de la variedad de problemas multiplicativos,¹⁶ elige el siguiente para esta clase:

Una panadería fabrica 180 tortas por día y las entrega a cada una de sus 15 sucursales de modo que todas reciban la misma cantidad de tortas. ¿Cuántas tortas llegan a cada sucursal?

Este problema se resuelve canónicamente con la operación $180 : 15$. Sin embargo, los alumnos, antes de conocer o dominar el algoritmo que permite resolver este cálculo, pueden recurrir a diversos caminos posibles:

- Mediante representaciones gráficas. Pueden representar la colección de 180 tortas y las 15 partes en las que las distribuirán y señalar con flechas, o sólo representar las 15 partes y allí colocar marcas representando las tortas. En ambos casos, cabe la posibilidad de distribuir de a una o varias tortas por vez. La cantidad a distribuir hace fatigosa la tarea y difícil la organización gráfica generando muchas posibilidades de "perderse" o equivocarse en el conteo.
- Otros procedimientos para el mismo problema se basan en cálculos aditivos.
 - Tantear una cantidad para cada parte. Estos tanteos pueden seguir dos orientaciones diferentes.
 - a) Probar con un cociente hipotético y reiterarlo 15 veces: por ejemplo, prueban con 8, "si le diera 8 tortas a cada uno...", suman 15 veces 8, 120. Entonces ajustan el tanteo, probando con un núme-

15. Esta clase se desarrolló en el Instituto Valle Grande y corresponde a datos de una investigación didáctica acerca de la división desarrollada por María Emilia Quaranta con beca UBACyT, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires.

16. Ver Documento Curricular N°4 del área de Matemática, Dirección de Currículum, Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

ro más alto, por ejemplo 10. Continúan ajustando el tanteo, por ejemplo probando con 15. Allí advierten que "se pasaron" y disminuyen el número hasta alcanzar una cantidad que, sumada 15 veces, les dé 180.

- b) Composición progresiva del cociente a partir de sucesivas aproximaciones. Por ejemplo: comienzan con 5 que, reiterado 15 veces comprueban que da 75; agregan otros 5 y allí llegan a 150; agregan 2 para distribuir los 30 restantes.
- También sería posible hacer un camino similar a través de restas reiteradas.
- Adicionar reiteradamente 15 hasta alcanzar 180 y luego contar la cantidad de veces que se suma 15. Sin embargo, no es un procedimiento mayoritario para esta clase de problemas¹⁷ porque cada uno de esos 15 representa "una torta por sucursal", mientras que, en el enunciado, el 15 representa "sucursales". Lo mismo puede decirse para la resta reiterada de 15. Para estos procedimientos aditivos también es posible ir haciendo sumas parciales, o utilizar el resultado de la suma de varios sumandos, en el último caso, por ejemplo, de varios 15 (30, 60, etcétera). En cualquiera de los procedimientos que utilizan sumas o restas reiteradas, la respuesta al problema no está dada en el resultado. Y es justamente el control del sentido de los diferentes pasos de su resolución lo que les permite a los alumnos comprender dónde se encuentra la respuesta buscada.
- Otro procedimiento consiste en realizar aproximaciones multiplicativas, buscando un número que, multiplicado por 15, dé 180. Esta aproximación multiplicativa puede realizarse de dos maneras diferentes:
 - Tanteando un cociente hipotético y ajustando en función de las comprobaciones sucesivas. Por ejemplo, un alumno que prueba multiplicando por 8, no alcanza a 180, busca entonces un cociente mayor y vuelve a multiplicar, así hasta encontrar el número que dé o se acerque lo más posible a 180.
 - Componiendo progresivamente ese cociente a través de multiplicaciones parciales. Por ejemplo, un alumno que hace "8 tortas para cada

17. Si lo es, en cambio, en aquellos problemas donde el valor de cada parte ya está dado. Por ejemplo: "La familia López está ahorrando \$15 por mes para comprarse un televisor que cuesta \$205. ¿Cuántos meses tienen que ahorrar para juntar el dinero que necesitan?"

sucursal, son 120; otras 2, son 30 más; otras dos, 30 más. Entonces son 12 para cada sucursal".

En ambos casos, la multiplicación por diez es un recurso poderoso por la economía que procura. En efecto, en un procedimiento multiplicativo pueden apoyarse en el conocimiento de la «regla de los ceros», partir de 15×10 , y continuar desde allí la resolución.

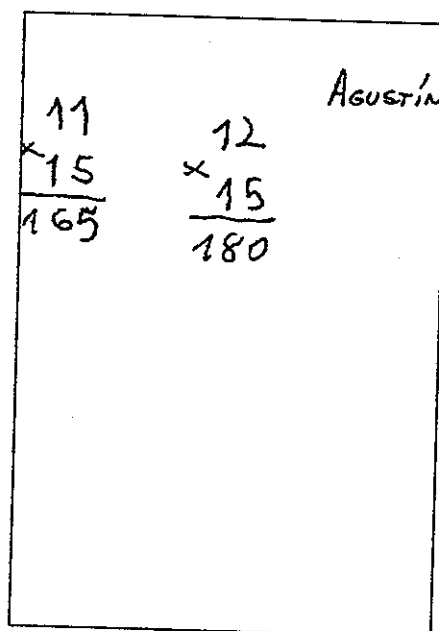
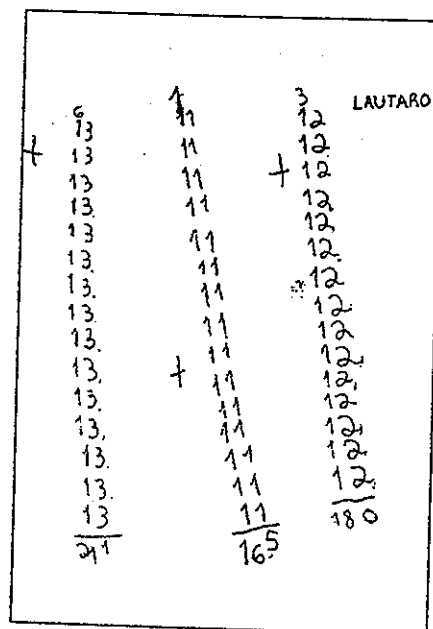
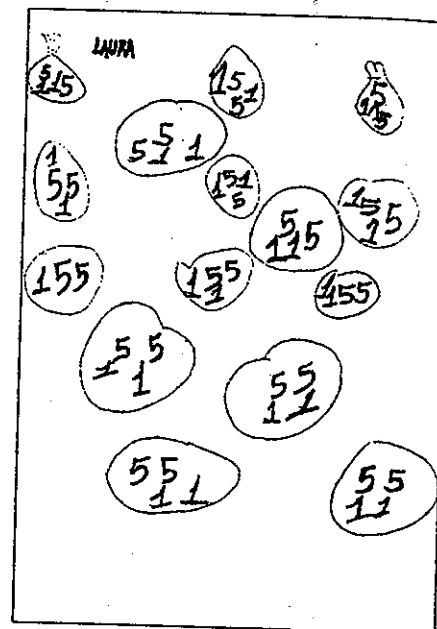
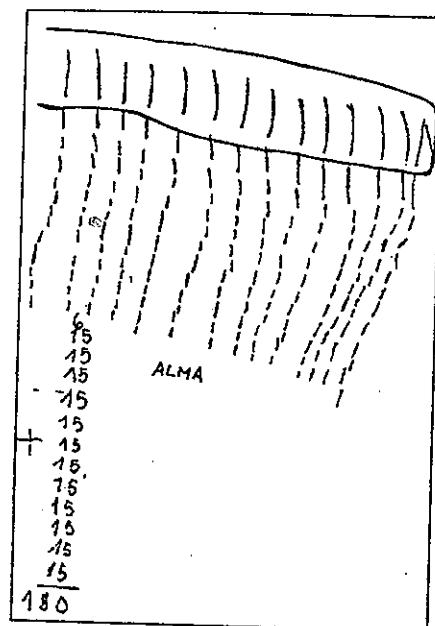
Desarrollo de la situación

Este análisis corresponde a las anticipaciones en relación con las soluciones posibles al problema que la maestra planteará a sus alumnos. Veamos ahora el desarrollo mismo de la clase. La maestra presenta el problema e indica a sus alumnos que lo lean solos unos instantes. Luego, pregunta si hay algo que no hayan entendido, aclarando que no dirían nada en ese momento acerca de cómo resolverlo o del resultado, que eso lo pensarían solos y después lo conversarían entre todos. Se aclara en particular el significado del término «sucursal». Este instante sólo se dedica a aclarar cuestiones del enunciado, de ninguna manera implica un inicio de resolución conjunta con toda la clase.

Como en los ejemplos anteriores, la maestra, mientras resuelven, observa los procedimientos que están siendo utilizados y selecciona los que luego se someterán a la discusión. También, en los casos en que resulta necesario, relee y explica el enunciado, aclara dudas, sugiere cómo empezar a hacer algo a aquellos alumnos que permanecen bloqueados. A una alumna, Alma, que había hecho la representación gráfica de la distribución de cada uno de los elementos, le sugiere que intente, para resolverlo más rápido, usar números en lugar del dibujo. A otros alumnos que habían terminado mucho antes que el resto les pidió que buscaran otra manera diferente de resolverlo.

La gran mayoría de las resoluciones fueron aditivas, apareciendo algunas multiplicativas. La maestra decidió centrar el debate en la comparación entre ambos procedimientos. Elige para la discusión los procedimientos de los siguientes alumnos:

- Alma: una representación gráfica y luego una suma reiterada de 15 basada en la organización gráfica inicial.
- Laura: basado en adiciones reiteradas que componen el resultado progresivamente.
- Lautaro: basado en tanteos aditivos.
- Agustín: basado en tanteos multiplicativos.



A continuación, transcribimos la discusión que, por su extensión, debió interrumpirse y continuarse al día siguiente.

M.: A ver, Alma, yo voy a hacer en el pizarrón lo que vos hiciste en tu hoja. Mientras yo lo hago vos explicásele a los chicos. (Transcribe en el pizarrón la distribución gráfica de Alma.)

Alma: Yo iba haciendo una torta para cada negocio. Después, los conté así (cuenta una columna de marquitas) y eran doce.

M.: ¿Todos entienden cómo lo pensó Alma?

Alumnos: Sí.

M.: Bueno, cuando pasé por los bancos vi que Alma estaba muy cansada de tanto hacer palitos y le dije si no habría alguna manera de hacerlo, usando los números, que no le llevara tanto tiempo, y ella hizo esto. ¿Querés hacerlo, Alma?

Alma copia en el pizarrón:

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 + 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \quad (12 \text{ veces } 15) \\
 15 \\
 \dots \\
 \hline
 180^{18}
 \end{array}$$

M.: ¿Qué les parece esto que hizo Almi? ¿Servirá para pensar este problema?

A.: Sí, es más rápido que hacer todos los palitos.

M.: Pero yo no entiendo algo, acá (señala la suma), ¿cómo me doy cuenta de la respuesta al problema?

18. Tal como señalamos en la nota anterior, no es un procedimiento frecuente para esta clase de problemas. Es necesario observar que Alma no lo utiliza inicialmente en su resolución sino después de la resolución gráfica donde, muy probablemente, sea la distribución de las marcas lo que le sugiere esa suma. De hecho, cuando justifica su adición reiterada, muestra cómo cada 15 representa una fila de marcas.

Alma: *Acá, ¿ves?, son doce: uno, dos, ..., ..., doce.* (Cuenta la cantidad de sumandos.)

M.: *¿Doce de qué cosa?*

A.: *Tortas.*

A.: *Negocios.*

M.: *¿Tortas o negocios?*

Algunos alumnos dicen tortas y otros, negocios.

M.: *Estos ciento ochenta que da el resultado de la suma, ¿qué son?*

A.: *Tortas, todas las tortas.*

M.: *¿Y estos quince?* (Señala uno de los sumandos.)

A.: *Tortas.*

A.: *¡No! Leé el problema, son quince negocios.*

M.: *Ah, ¿y por qué será que Alma contó las veces que había sumado quince para saber cuántas tortas le tocaban a cada negocio?*

Alma: *Este quince es esto* (señala una fila de las marcas distribuidas), *son doce de éstas.*

Agustín: *Cada quince quiere decir que le dio una torta a cada negocio, ¿ves?* (Se para y señala sobre la fila señalada por Alma.)

M.: *Y eso, ¿tendrá algo que ver con lo que yo había preguntado?*

Fede: *No me acuerdo qué habías preguntado.*

M.: *¿Por qué Alma había buscado la cantidad de tortas que le tocaban a cada negocio contando la cantidad de veces que sumaba quince?*

Agustín: (Enojado.) *¡Claro! ¿No te digo que en cada quince hay "una" para cada negocio, si hay doce veces quince, hay doce para cada negocio?*

M.: *¿Entienden lo que está diciendo Agustín?*

A.: *No.*

M.: *Él dice que cada uno de estos quince que Alma puso acá, quiere decir una torta para cada negocio, entonces una, dos, tres... doce tortas para cada negocio.* (Señala cada uno de los "15" escritos en el pizarrón.)

Algunos alumnos siguen con expresión de no comprender.

M.: *Bueno, ahora Laura nos va a mostrar cómo lo pensó ella. Pero Laura, ¿te animás a hacerlo en el mismo orden en que lo fuiste haciendo en tu hoja para que los chicos vean bien cómo lo fuiste pensando?*

Laura: (Dibuja los 15 círculos y luego va anotando dentro de cada uno primero un 5; luego otro 5; luego un 1; y, finalmente, otro 1.) *Primero pro-*

bé con cinco a cada negocio y era muy poquito, después probé con cinco más, eran diez para cada negocio: diez, veinte, treinta (mientras va señalando sobre cada círculo)... *ciento cincuenta. Me faltaba, uno más a cada uno eran ciento cincuenta y uno, ciento cincuenta y dos,..., ciento sesenta y cinco. Uno más a cada uno: ciento sesenta y seis, ciento sesenta y siete,..., ciento ochenta. Entonces, para cada negocio, cinco, diez, once, doce tortas.*

M.: *¿Entendieron todos cómo lo hizo Laura?*

A.: *Sí.*

M.: *¿Dónde dice la cantidad de tortas que le tocan a cada sucursal?*

Marisol: *Adentro de cada globito: cinco, diez, doce.*

M.: *¿Y dónde están acá las quince sucursales?*

Marisol: *Los quince globitos.*

Leo: *¿Pero no era más rápido si hacía doce más doce, más doce...?*

M.: *¿Y por qué creen que no habrá hecho de entrada doce más doce...? ¿Cuántas veces tendría que haber sumado doce?*

Andrés: (Cuenta sobre el pizarrón la cantidad de círculos.) *Quince.*

M.: *¿Y por qué creen que de entrada no sumó quince veces doce?*

Laura: (Enojada.) *¡Yo no sabía que eran doce!*

M.: *Laura dice que ella, antes de resolver el problema, no sabía que eran doce las tortas para cada sucursal. ¿Alguien lo sabía?*

Laura: (Siguiendo enojada.) *¡No! ¡Si es lo que pregunta!*

M.: *Laura dice que nadie lo sabía porque justamente es lo que nos piden que averigüemos en el problema. ¿Están todos de acuerdo?*

Los alumnos asienten.

M.: *Bueno, por hoy vamos a dejar aquí y mañana vamos a continuar conversando sobre cómo resolvimos este problema.*

Al día siguiente, antes de iniciar la clase, la maestra copia en el pizarrón los procedimientos que se habían discutido en la clase anterior.

M.: *Bueno, ayer resolvimos este problema* (lee el enunciado) *y empezamos a conversar sobre diferentes maneras de resolverlo. Habíamos llegado a ver estas dos. ¿Alguien nos cuenta cómo eran?*

Los chicos relatan los dos procedimientos.

M.: *Ahora vamos a ver cómo lo resolvió Lautaro. Lauti, vení y copió cómo lo hiciste.*

Lautaro copia:

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 13 \\ 13 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

211

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 11 \\ 11 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

165

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ 12 \quad 15 \text{ veces} \\ \dots \\ \hline \end{array}$$

180

Lautaro: *Primero probé con trece para cada sucursal, me pasé; después con once, eran pocas, entonces tenían que ser doce, y me dio.*

M.: *¿Todos entienden lo que hizo Lauti?*

A.: *Sí.*

M.: *¿Se acuerdan de que ayer ustedes se preguntaban por qué acá no se había hecho directamente quince veces doce? (Señala el procedimiento de Laura.) Bueno, acá (señala el procedimiento de Lautaro) sí se hizo quince veces doce, ¿eso quiere decir que él ya sabía que eran doce?*

Leo: *No, porque él fue viendo, trece no era, once tampoco y ahí se avivó de que era doce.*

M.: *Y en esto que hizo aquí Lauti (señala la suma reiterada de "12" en el pizarrón), ¿cómo me doy cuenta de que eran quince las sucursales?*

Lautaro: *Y, porque yo probaba siempre quince veces, doce para cada sucursal.*

M.: *Miren, Lauti acá sumó doce quince veces, ¿no? ¿Qué tiene de parecido y qué tiene de diferente con lo que hizo Laura?*

A.: *Que Laura no puso directamente doce, probó cinco, después cinco más, diez; después dos más, doce. Y ahí sí le quedó doce.*

M.: *Doce, ¿qué?*

A.: *Tortas para cada negocio.*

M.: *Ah, ¿y tienen algo de parecido?*

A.: *Sí, los dos hicieron con doce, pero llegaron distinto. Laura probó cinco más cinco más uno más uno y Lautaro probó con trece, once y después doce.*

M.: *Bueno, ahora vamos a ver cómo lo hizo Agustín.*

Agustín: *(Pasa al pizarrón.) Yo ya sabía que quince por diez era ciento cincuenta, entonces tenía que ser un poquito más, hice once por quince y me dio ciento sesenta y cinco, entonces era un poquito más, doce.*

M.: *Hacelo en el pizarrón.*

Agustín escribe:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 15 \\ \hline 165 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times 15 \\ \hline 180 \end{array}$$

Agustín: *Era doce, porque doce por quince es ciento ochenta.*

M.: *¿Cómo hiciste para saber cuánto era once por quince o doce por quince?*

Agustín: *Porque once eran quince más que ciento cincuenta; y doce, quince más.*

M.: *Agustín dice que él ya sabía que diez por quince era ciento cincuenta (anota 150 en el pizarrón), entonces once por quince eran quince más (anota en el pizarrón $150 + 15 = 165$ y $165 + 15 = 180$). ¿Entienden cómo hizo Agustín estas cuentas?*

A.: *Sí.*

M.: *Ahora, yo me pregunto, ¿qué tienen de parecido y qué tienen de diferente lo que hicieron Agustín y Lautaro?*

Agustina: *Uno hizo de por y otro de más.*

M.: Agustina dice que uno hizo una multiplicación y el otro una suma. Ustedes, ¿qué piensan?

A.: Que sí.

M.: Ah, ¿y encuentran algo de parecido?

A.: No.

A.: Que en los dos está el doce, y el once. (Se refiere a los resultados posibles que fueron tanteando.)

A.: Pero no está el trece.

Agustín: Porque estábamos probando. Yo no probé con el trece.

M.: Ah, y en la suma de Lauti no aparece el quince.

Laura: No, porque está en las quince veces que puso el doce.

M.: Laura dice que el número quince no aparece, pero está en las quince veces que aparece acá el doce. ¿Están todos de acuerdo?

Varios alumnos: Sí.

M.: Y, ¿por qué será que el doce acá aparece una sola vez (señala la multiplicación) y acá tantas (señala la suma reiterada)?

Laura: Porque el quince en la cuenta de por quiere decir que se repite quince veces. En la suma el número está quince veces.

M.: Laura dice que en la multiplicación basta poner una sola vez el número porque el otro número me dice cuántas veces se repite. ¿Es así?

Varios alumnos dicen que sí.

M.: Y, acá (señala la suma), ¿me puedo dar cuenta de un vistazo, así rápido, cuántas veces se repite el número doce?

Leo: No, tenés que contarlos.

M.: Claro, Leo dice que hay que contarlos. Y acá, en la multiplicación, ¿me puedo dar cuenta rápido, de un vistazo, cuántas veces se repite el número doce?

Leo: Quince.

Johnny: ¡Qué viva! Ahí tenés el quince.

M.: Y estas sumas que están acá (señala el procedimiento de Lautaro), ¿podría haberlas pensado con otra operación que fuera más corta?

Laura: Y sí, como ésa. (Señala el procedimiento de Agustín.) Trece por quince, once por quince, doce por quince.

M.: Laura dice que estas sumas yo las podría haber hecho con una multiplicación, ¿están de acuerdo?

Muchos alumnos responden afirmativamente.

M.: Bueno, chicos, vimos todas estas diferentes maneras de resolver este problema, y también que la multiplicación a veces nos sirve para resolver de una manera más corta algunas sumas. ¿Cuándo?¹⁹

A.: Cuando los números que sumás son los mismos.

M.: Bueno, vamos a anotar todo esto que aprendimos en las carpetas.

En esta extensa discusión vemos a la maestra desplegar intervenciones muy variadas. Por un lado, y como en los ejemplos anteriores, pide a los alumnos que expliciten sus procedimientos. Esto lleva no sólo a que los autores presenten los suyos sino también a que el resto de los alumnos pueda considerar procedimientos diferentes de los propios, es decir, descentrarse de la solución que ellos mismos habían pensado y concebir otras posibles. Eventualmente, también, podrán apropiarse de modos de resolución diferentes de los que ellos pudieron desarrollar hasta el momento. Durante la exposición, la maestra pregunta por el significado de los diferentes números, para ir trabajando sobre el control del sentido de los diferentes pasos de la resolución por parte de toda la clase y no sólo del autor del procedimiento.

A medida que los procedimientos iban siendo expuestos, se comparaban entre sí. La comparación no se centró, en este caso, tanto en la economía y fiabilidad de los procedimientos sino en poder interpretar un procedimiento en términos del otro. Es decir, en buscar cómo estaban los elementos y las relaciones del problema formulados en uno y en otro. No queremos decir con esto que, en otros casos, no sea crucial para el avance de los procedimientos la comparación en términos de los criterios de confiabilidad y economía, sólo que no era el objetivo de este intercambio.

Vemos cómo la maestra muchas veces reitera lo que dijo algún alumno para que toda la clase pueda tomarlo, o lo reformula para hacerlo comprensible. En otras ocasiones cuestiona, repregunta, recuerda cosas que fueron dichas antes y las contrasta con otras que dicen ahora. También, contrargumenta algunas de las afirmaciones. Otra intervención de la docente consiste en ofrecer la escritura aritmética de lo que dicen los alum-

19. Cabe aclarar que la multiplicación es una operación diferente de la suma, pero equivalente a una suma de sumandos iguales. Una multiplicación *no es igual* a una suma reiterada, sólo son equivalentes en tanto permiten alcanzar el mismo resultado.

nos, para ofrecer herramientas que colaboren en la objetivación de los conocimientos. Por último, cierra con una conclusión sobre los aspectos principales que fueron discutidos y que considera necesario que los alumnos reconozcan como conocimientos a los que se les otorga un *status* oficial y que podrán –y deberán– ser reutilizados en las situaciones donde sean pertinentes.

Las observaciones que hacemos aquí corresponden simplemente a un análisis del mismo docente a posteriori del desarrollo de su clase, de manera tal de poder ver en qué medida se acerca o se aleja de sus previsiones, viendo cuáles fueron las intervenciones más pertinentes, cuáles no, qué otras hubieran sido posibles, a los fines de poder ajustar lo previsto para futuros desarrollos de esta y otras clases.

5.4. Cuarta situación: encontrar diferentes maneras de resolver una suma

Contexto didáctico

Se les propone a los alumnos de primer año de la EGB la tarea de encontrar y “anotar” todas las maneras posibles de resolver un cálculo, $55 + 36$. El objetivo del momento de discusión es poner en común algunas de las distintas resoluciones y analizarlas enfocando especialmente la comparación entre los diferentes procedimientos. El abanico de los procedimientos abarcaba algunos que presentaban la descomposición decimal de los dos sumandos; otros, más económicos por cierto, la descomposición de sólo uno de los términos; otro procedimiento, más económico aún, consistía en considerar la suma de las decenas, como si fueran unidades pero sin perder de vista que correspondían a las decenas.²⁰

20. El fragmento de clase que presentaremos corresponde a un registro de clase realizado en la escuela Numen, y forma parte de los datos recogidos en una investigación didáctica llevada a cabo por Susana Wolman. Los alumnos trabajan resolviendo operaciones sin que se les hubiera enseñado previamente el algoritmo convencional de la suma. Esta investigación comienza en el mes de agosto, cuando los chicos ya saben resolver cuentas de las llamadas “sin dificultad”. Se les plantea situaciones problemáticas que se resuelven con sumas que convencionalmente requieren el agrupamiento, pero frente a las cuales los alumnos despliegan procedimientos numéricos no convencionales. Este registro corresponde al mes de noviembre.

Desarrollo de la situación

Una vez realizada la tarea, la maestra recoge las hojas de los niños y analiza las producciones. Al comenzar la puesta en común ya había decidido cuáles procedimientos se iban a someter a la discusión grupal.

Al comenzar la clase, la maestra invita a Gabriel a escribir en el pizarrón el procedimiento previamente seleccionado.

Gabriel: (Anota en el pizarrón)

$$55 + 36 = 91$$

$$50 + 30 = 80$$

$$80 + 6 = 86$$

$$86 + 5 = 91$$

M.: Fíjense si entienden lo que hizo Gabriel.

Gabriel: (Antes de que alguien pudiera decir algo.) Yo primero hice cincuenta más treinta, que es ochenta. (Señala en el pizarrón.)

M.: ¿Cómo lo sabés?

Gabriel: Hice cinco más tres, ocho. No, yo ya sabía que cinco más tres es ocho, entonces, cincuenta más treinta es ochenta.²¹

M.: Decime, si fuera treinta más cuarenta, ¿también lo harías así?

Gabriel: Sí, es setenta, tres más cuatro es siete... Bueno, aquí (se refiere a lo que escribió en el pizarrón) después, le agregué seis.

Guillermo: ¿Por qué seis y no sesenta?²²

Gabriel: Porque está atrás de los números que tienen diez. Los que están atrás son números comunes y corrientes.

Brian: El tres sólo vale como tres unos, pero el tres del treinta, como tres diez.²³

21. Gabriel utiliza el último de los procedimientos mencionados. Para profundizar al respecto, véase Lerner, Sadovsky y Wolman (1994).

22. Guillermo formula una pregunta muy utilizada por la maestra en clases anteriores. El objetivo de éstas es ayudar a la consideración del valor posicional. Como veremos en lo que continúa, varios alumnos imitan el tipo de preguntas que ella formula con la idea de ayudar a la justificación de los números considerados.

23. Esta respuesta, que alude al valor multiplicativo de la cifra de las decenas, no es habitualmente dominada por los chicos de primer año de la EGB. Saber que el treinta y seis se forma con tres de diez y un seis no es equivalente a saber que es el tres de treinta y seis la cifra que representa tres grupos de diez.

Gabriel: (Continúa con su explicación.) *Bueno, y al final el cinco del cincuenta y cinco. En el cincuenta y cinco, uno (de los cincos) vale cinco dieces y el otro cinco unos.*

Pasa luego Facundo, y la maestra le señala cuál de todos los procedimientos que tiene en su hoja tiene que copiar en el pizarrón.

Facundo: (Anota en el pizarrón.)

$$55 + 10 = 65$$

$$65 + 10 = 75$$

$$75 + 10 = 85$$

$$85 + 6 = 91$$

M.: ¿Entienden lo que hizo?

Guillermo: *Sí, pero el diez, ¿de dónde lo sacaste?*

Facundo: *Del treinta y seis.*

Denise: *Pero, ¿cómo sabías que tenías que poner ese diez?*

Facundo: *Porque lo saqué del treinta y seis, los tres diez (los señala en su procedimiento).*

M.: *Bueno, ¿en qué se parecen o no se parecen estas cuentas?*

Julietta R.: *La más larga es la de Facu, porque tiene cuatro y la de Gabriel tiene tres (se refiere a los cálculos parciales).*

Nicole: *Porque Gabriel no desarma. (Se refiere a desarmar de a diez algún término de la suma.)*

Julietta R.: *Facu y Gabriel desarman, Facu el treinta y seis lo desarma por diez.*

M.: *A ver, ¿cómo es eso de que desarma por diez?*

Denise: *¡Claro! ¡Se pueden desarmar de las dos maneras! Gabriel se para el cincuenta y cinco y el treinta y seis... pero no... lo... lo... La más larga es la más fácil porque va desarmando los treinta en los dieces.*

Facundo: *Claro, es más fácil porque de... de... cincuenta y cinco si tenés diez más, sabés que el de adelante cambia y el otro queda igual.*

M.: *¿Y lo que hizo Gabriel?*

Facundo: (Mirando el pizarrón.) *También es fácil... ¿no?*

Brian: *Sí, es fácil, cincuenta más treinta es ochenta.*

La maestra invita a pasar a Franco y le señala cuál es el procedimiento que quiere que escriba.

Franco: (Anota lo siguiente en el pizarrón.)

$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$$

$$10 + 10 + 10 = 30$$

$$30 + 5 + 6 = 41$$

M.: *A ver, ¿cómo es eso?*

Franco: *Diez más diez, veinte; treinta, cuarenta y cincuenta (y continuando con los de abajo) sesenta, setenta y ochenta. Pongo el ochenta y más cinco y más seis es noventa y uno.*

Gabriel: *¡Pero está mal escrito! Los diez de abajo forman treinta, no ochenta. ¡Vos los ponés mal!*

Franco: *¡No, nene! Está bien, los de arriba son los del cincuenta y los de abajo, los del treinta.*

En el fragor de la discusión Gabriel y otros chicos se van acercando al pizarrón para tratar de convencer a Franco de que así no se entiende.

M.: *Bueno, vuelvan todos a sus lugares, que así no se entiende nada. A ver, Brian, ¿qué estabas diciendo?*

Brian: *Fijate, ¿no ves que te queda diez, veinte, treinta y vos le ponés ochenta? (A medida que habla se va acercando nuevamente al pizarrón.) Le tenés que volver a poner el cincuenta adelante, acá abajo (señala en el pizarrón), antes de los diez.*

Franco: (Exaltado.) *Pero, ¿no ven que viene desde arriba, que ya tengo cincuenta? Abajo, acá (señala el lugar marcado por sus compañeros) no puse el cincuenta, porque yo ya sabía que tenía cincuenta.*

Julietta: *Pero algunos no saben...*

Franco: (Irritado.) *Pero como yo los tenía, yo ya sabía...*

Guillermo: *Sí, pero lo que vos decís no se entiende; tres diez, no son ochenta, dan treinta.*

Franco: *No, porque yo lo tengo en la mente.*

Santiago: *Cuando lo decís está bien, pero cuando lo anotás está mal.*

M.: *Bueno, parece que tenemos un problema con cómo se escriben los cálculos que pensamos. Franco dice que el cincuenta lo tiene en la mente, pero de verdad, aquí (señala la suma de los tres diez), como dicen muchos de ustedes, el resultado no da ochenta, sino treinta. Si se piensa que lo de arriba continúa abajo, estamos de acuerdo, pero no alcanza con tenerlo en la mente, hay que escribirlo para que todos lo entiendan.*

Franco: *Está bien, pero yo lo entiendo... (La puesta en común continúa.)*

Analicemos ahora las intervenciones docentes que nos muestra este fragmento:

- La tarea implicaba la búsqueda de diferentes procedimientos para el mismo cálculo. La producción de los chicos fue numerosa pero la maestra eligió previamente algunos de los procedimientos. El repertorio que se presentaba iba a permitirle intentar que todos los alumnos tomaran contacto con procedimientos que ya empleaba la mayoría como con otros que sólo dominaban unos pocos. Nos referimos específicamente al procedimiento —bien avanzado, por cierto— de Gabriel. Casi todos recurrieron a procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números. Sin embargo, se considera importante que tomen contacto con otros que superan esta posibilidad, porque están basados en el reconocimiento del valor de las cifras de un número como producto de la multiplicación por la potencia de la base. Este hacer público un procedimiento muy avanzado no implica que todos se apropien de él pero sí que tomen conocimiento de su existencia e intenten comprenderlo. Parece ser así, por lo menos para algunos de los chicos, ya que al finalizar la clase, Facundo responde, cuando la maestra pregunta si les sirvió: “A mí me sirvió mucho la suma de Gabriel”.
- La maestra incita a comparar las producciones: “la más larga es la más fácil”, afirman algunos, afirmación que contraría la idea de la economía propia del algoritmo, pero necesaria en la construcción del sentido. “Más fácil”, para los alumnos, muchas veces equivale a “más comprensible” o más transparente. En otros momentos, han afirmado que el cálculo más largo es el más difícil —justamente porque es más largo— pero se entiende más. Lo más fácil o lo más difícil, desde el punto de vista de los niños, depende de las posibilidades de comprender las producciones en cuestión.
- Algunas intervenciones de la maestra apuntan a generalizar afirmaciones de los alumnos instalando como problema si ellas se cumplen en otros casos. Por ejemplo, cuando pregunta “si fuera treinta más cuarenta, ¿también lo harías así?”.
- Interviene asimismo con respecto a la escritura matemática de los cálculos. Hubiera sido más fácil que la maestra le indicara a Franco la manera correcta de anotar sus cálculos y seguramente él le hubiera obedecido, pero es más importante y efectivo que el autor coteje con sus pares la “legibilidad” de su producción. La maestra avala luego de

la discusión. Cuando esto ocurre, se encuentran suficientes motivos para cambiarla, aunque en un principio se intente defenderla acérrimamente, como hace Franco.²⁴

6. CONCLUSIONES

Nos preguntábamos al iniciar este trabajo qué, para qué y cómo se discute en las clases de Matemática. Retomemos ahora, para finalizar, cada uno de nuestros interrogantes tratando de sintetizar en qué medida hemos podido avanzar sobre ellos a lo largo del capítulo.

6.1. ¿Qué se discute en las puestas en común que tienen lugar en las clases de Matemática?

Ante todo, debemos tener presente que estos momentos son *espacios didácticos*. Esto es, espacios de enseñanza y de aprendizaje donde interviene un saber específico, y es precisamente en relación con dicho saber que se desarrollan las discusiones. No se trata de conversaciones por el intercambio en sí mismo que podrían tener lugar en otros momentos y con otros objetivos, como mejorar la comunicación o la relación grupal. Tampoco se trata de momentos previos al trabajo didáctico a modo de “motivación”, ni necesariamente destinados a la conclusión o cierre de un tema. La interacción grupal, el modo de participar en los intercambios —aprender a respetar la producción propia y la de los otros, escuchar sin interrumpir, respetar turnos, poder revisar la posición propia, etcétera— constituye también un propósito más general de la escuela, sólo que no puede desarrollarse en el vacío sino en relación con contenidos de enseñanza. Estas discusiones son parte constitutiva de los procesos didácticos y se desarrollan siempre en torno a un objeto de conocimiento, apuntan-

24. Cuando un alumno produce una escritura —correcta o no—, la maestra la somete a la discusión del grupo. Es diferente el caso que mencionábamos en ejemplos anteriores, donde el maestro ofrece escrituras aritméticas que se correspondan con lo que están pensando los niños y no saben cómo anotar.

do hacia un saber al que queremos que nuestros alumnos se aproximen progresivamente. La organización de estos momentos por parte del docente toma como ejes aspectos de saberes matemáticos propiciando la participación de los alumnos en términos de comunicaciones y argumentaciones en relación con dichos saberes. Tanto la planificación como el desarrollo de las clases cuyos fragmentos presentamos muestran claramente cómo el maestro se centra, a partir de sus análisis previos, en determinados aspectos de los conocimientos matemáticos sobre los que considera necesario trabajar y conduce los intercambios de acuerdo con ellos.

6.2. ¿Para qué incluir espacios de discusión en las clases de Matemática?

Mostramos, por un lado, que las interacciones sociales, bajo ciertas condiciones, generan avances en los conocimientos. Mostramos también, por otro lado, cómo las discusiones favorecen en parte la explicitación, justificación y validación de los conocimientos que los alumnos utilizan en la resolución de problemas, procesos que son constitutivos del sentido de los conocimientos. No estamos queriendo decir que los niveles de formulación o de validación se trabajen sólo a partir de puestas en común. Estos niveles del sentido de los conocimientos pueden requerir de otras situaciones específicas que apunten a ellos. Los momentos de discusión generan condiciones que facilitan el avance hacia la conceptualización de aquellos conocimientos que los alumnos pudieron utilizar en las resoluciones.

El desarrollo de este momento [de confrontación] obliga a los alumnos, por un lado, a volver sobre sus procesos, sobre sus propias acciones, a describirlas y a defenderlas y a tomar conciencia de los recursos de los que disponen, de su pertinencia y de su validez; pero también a tratar de comprender los procesos de los demás, de sus argumentos y, si es posible, a apropiarse de los procedimientos de sus compañeros, ampliando el campo de sus posibilidades (Saiz, 1995).

Las discusiones permiten plantear *nuevos problemas* que obliguen a nuestros alumnos a reflexionar sobre lo realizado, a explicitarlo y justificarlo. En consecuencia, si consideramos que en toda resolución de proble-

mas se juega algún nivel de comprensión, menor o mayor, del conocimiento en cuestión, las puestas en común abrirían un espacio para que se progrese en dicha comprensión.

Quisiéramos introducir aquí una aclaración. Nos estamos refiriendo a las discusiones, con las explicitaciones y argumentaciones que estos momentos posibilitan, en tanto medio para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos en los diferentes niveles de la educación inicial y básica. Estas discusiones no siguen necesariamente las reglas del debate matemático,²⁵ aunque quizás constituyan sus precursores. Arsac *et al.* (1992) desarrollan una serie de situaciones didácticas cuyo objetivo es que los alumnos aprendan esas reglas desde los 11 años.²⁶ Es decir, se ocupan de las reglas del debate matemático en tanto objeto de enseñanza. Reconocemos la importancia de tomar, como lo hacen estos autores, los procedimientos propios de la demostración matemática como objeto de enseñanza a partir de determinado nivel de la escolaridad. Sin embargo, es necesario aclarar que, en nuestro trabajo, nos estamos refiriendo a las discusiones desde una perspectiva más general, para la enseñanza de todos los conceptos matemáticos y desde los niveles iniciales. En otras palabras, el objetivo de introducir estos espacios en el aula no es, al menos en forma directa, el aprendizaje de las reglas del juego matemático, como lo mencionan los autores citados, sino el aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos. Abordamos el modo como los intercambios y reflexiones producidos en estos momentos son constitutivos del sentido de dichos saberes.

Si bien las discusiones de las que aquí nos ocupamos no siguen los requisitos del debate matemático, sí son momentos donde se movilizan pruebas. Al respecto, Balacheff (1982) distingue entre explicaciones, pruebas y

25. Por ejemplo, que la verdad se establece a partir de argumentaciones que hacen derivar unas afirmaciones de otras consideradas verdaderas; que una multiplicidad de ejemplos no bastan para establecer la verdad de un enunciado; que un contraejemplo es suficiente para revisar su falsedad.

26. Se proponen enseñar a los alumnos las siguientes reglas del debate matemático: un enunciado es verdadero o falso; un contraejemplo basta para demostrar la falsedad de un enunciado; la argumentación se basa en propiedades y definiciones sobre las cuales existe un acuerdo; la multiplicidad de ejemplos que verifiquen un enunciado no bastan para probar que es verdadero; en geometría, la constatación sobre dibujos no basta para probar la verdad de un enunciado.

demostraciones. Una explicación es todo discurso que apunta a comunicar el carácter de verdad de un enunciado matemático. Una prueba es una explicación aceptada por otros en un momento dado. Por ello, una explicación puede constituir una prueba para un grupo mientras que no lo es para otro. Finalmente, las demostraciones son pruebas aceptadas por toda la comunidad de matemáticos, donde los enunciados se deducen siguiendo ciertas reglas a partir de unos pocos enunciados considerados verdaderos y, además, se refieren a objetos teóricos. Al desarrollarse con niños más pequeños, estas discusiones respetan ciertas reglas, pero están lejos de las exigencias de una demostración matemática, sobre todo en tanto esta última se apoya en una estructura formal hipotético-deductiva. Las reglas que rigen las discusiones de estas clases son construidas y apropiadas progresivamente por los alumnos a medida que participan en estos espacios didácticos. Siguiendo la clasificación mencionada, se advierte que las argumentaciones de nuestros alumnos no son sólo simples explicaciones, sino que adquieren muchas veces el carácter de pruebas, a veces empíricas o pragmáticas ligadas a casos particulares. Es decir, son explicaciones que, en la discusión, se someten a la aceptación o rechazo racional, argumentado, de los compañeros.

6.3. ¿Cómo organizar espacios de discusión en las clases de Matemática?

Mencionamos que un alumno no aprende matemática si no resuelve problemas pero, a su vez, tampoco aprende matemática si sólo resuelve problemas (Brousseau, 1986). Es necesario que los conocimientos empleados, que aparecen como herramientas eficaces para la resolución, puedan ser explicitados, considerados como objetos de reflexión, intentando probar su verdad y vinculándolos con los saberes oficiales (véase el capítulo 3 en este mismo volumen).

En contraste con esta concepción aparecen dos modelos de enseñanza. Por un lado, la enseñanza habitual que consistió —y en algunos casos aún consiste— en que el maestro explicara, mostrara un conocimiento, diera ejemplos y luego los alumnos lo aplicaran resolviendo, tal como él lo hizo, una serie de ejercicios o problemas similares. En tal modelo de enseñanza no caben las verdaderas discusiones, con confrontaciones y argumentacio-

nes; tal vez, sólo cotejar que los resultados obtenidos sean semejantes o descubrir y corregir algún error.

Por otro lado, oponiéndose a esta concepción didáctica, se han desarrollado prácticas de enseñanza que se limitaban —o se limitan— a plantear problemas para que los alumnos resuelvan, suponiendo que el conocimiento surge “espontáneamente” por el solo hecho de enfrentarse a situaciones. En este modelo tampoco caben discusiones con el tipo de intervenciones decisivas del docente como las que hemos analizado, que dirigen el intercambio en la dirección de los saberes que quiere enseñar.

Las discusiones que tratamos apuntan a que los alumnos puedan reflexionar o replantearse lo que hicieron, superando la sola utilización de los conocimientos. Para que puedan tener lugar, es necesario que previamente haya existido una actividad genuina por parte del alumno, algún tipo de trabajo autónomo frente al problema, el despliegue de algún camino o inicio posible de resolución, desde donde otorgar cierto significado a lo que se plantee luego, desde donde poder avanzar en la construcción del sentido de esos conocimientos. Si lo que el alumno hizo ha sido indicado por el maestro, se excluye la posibilidad de que comprenda por qué constituye una herramienta para ese problema —ya que no ha sido movilizado por él mismo, o no puede reconstruir la relación entre el conocimiento y la situación—. En consecuencia, carecerán de sentido los momentos de discusión puesto que el alumno no tendrá dónde anclarlos ni un punto de partida para participar de su desarrollo. En pocas palabras, estos momentos y el modo como se desarrollan se encuentran íntimamente ligados a una concepción particular sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

La organización de estos espacios no deja de presentar *deformaciones*, algunas de las cuales ya han sido relevadas (Saiz, 1995).

- Que se dé lugar a una presentación exhaustiva de los procedimientos de resolución de los alumnos.
- Que se utilicen estos momentos centrándose en la corrección de los procedimientos y resultados obtenidos.
- Que se admita como verdadero algo porque lo sostiene la mayoría como si éste fuera un criterio de verdad. A veces, son los alumnos los que traen este criterio (“está bien porque a la mayoría nos dio igual”); otras veces, esta confusión es instalada por los maestros mismos, por ejemplo, cuando proponen votaciones para decidir acerca de un procedimiento o re-

sultado. No se trata sólo de seleccionar una opción entre otras sino, fundamentalmente, de dar razones.

- Que se confundan los momentos de discusión con la resolución conjunta de un problema.
- Que, tras abrir un panorama de procedimientos utilizados, se sugiera preferencia por alguno.
- Que se conviertan en una nueva rutina escolar. No es necesario que toda actividad sea seguida de una puesta en común. De hecho, algunas actividades se proponen tras una discusión grupal como situaciones donde los alumnos puedan reutilizar aquello que han aprendido en el intercambio. En una rutinización de estas prácticas también se corre el riesgo de esclerosar su funcionamiento, generando tratamientos superficiales de los temas, por ejemplo, se abre a una mínima exposición y se cierra con la enunciación de la versión "oficial".

En cuanto al desarrollo mismo de las discusiones, vimos en las sucesivas clases cómo las maestras proponían problemas ante los cuales los alumnos podían poner en marcha una variedad de procedimientos, cómo alentaban su resolución y actuaban en caso de bloqueos. Pero su tarea comenzaba antes, analizando el contenido y la situación propuesta, previendo un inventario de las respuestas posibles, y continuaba luego de la resolución de los alumnos seleccionando aquellas producciones —acertadas o no— que aportarían elementos ricos para la discusión.

En los momentos específicos de la discusión, las *intervenciones de las maestras* fueron variadas y dependían de la situación, pero podemos extraer algunas que atraviesan los diferentes ejemplos.

- Someten a discusión algunas de las resoluciones elegidas en función de los objetivos de enseñanza y las posibilidades que el conjunto de los alumnos han movilizado en la resolución. Para ello, invitan a sus autores —o lo hacen ellas mismas— a exponer los procedimientos o las respuestas. La discusión se desarrolla, en algunos casos, de a un procedimiento por vez, es decir, se presenta el primero, se discute sobre él y, luego, se pasa a exponer y discutir el siguiente, continuando con una comparación entre ambos, etcétera.
- Aceptan las diferentes respuestas de los alumnos, tanto las correctas como las incorrectas. Es importante tener cuidado de no emitir valora-

ciones de las respuestas, no sólo a través de lo que el maestro dice a sus alumnos, sino también de gestos, actitudes, tonos, etcétera. Es fundamental que no sancione la validez o invalidez de una respuesta, sino que abra un espacio de incertidumbre que obligue a los alumnos a buscar por sí mismos criterios para establecer si una solución o una afirmación son correctas o no: "Cuando el maestro adopta una actitud de neutralidad —provisoriamente [...]— frente a las posiciones de los alumnos, cuando no establece explícita ni implícitamente su evaluación de lo que dicen o hacen los niños, éstos se ven obligados a argumentar en defensa de sus hipótesis, de sus interpretaciones o de sus estrategias. De este modo, la discusión se profundiza y contribuye efectivamente al progreso del conocimiento" (Lerner, 1996).

- Réformulan algunas explicaciones para que puedan ser comprendidas por todo el grupo; piden aclaraciones y justificaciones ("Yo no entiendo por qué marcan los 18 alumnos de 2° C aquí, en los 27 de 2° A"); hacen preguntas, proponen contraargumentaciones, etcétera. Las preguntas de la maestra se dirigen a toda la clase, no sólo al autor o autores de la resolución y, si un alumno pregunta o le dice algo a la maestra o a otro alumno en particular, ésta lo vuelca hacia todo el grupo.
- Muestran a toda la clase la escritura aritmética correspondiente a lo que los alumnos piensan cuando ellos mismos no pueden formularlo.
- Proponen el análisis de los procedimientos seleccionados, que puede implicar los siguientes aspectos:
 - Cuidar que toda la clase pueda comprender la secuencia de pasos desarrollada.
 - Pedir que se analicen momentos parciales de una resolución: "Hasta acá, ¿qué averiguamos?, ¿qué falta averiguar?", etcétera.
 - Pedir justificación de la pertinencia de los conocimientos movilizados. Por ejemplo, cuando los chicos dicen que 36 es igual a $30 + 6$ o a $10 + 10 + 10 + 6$, es interesante hacer explicitar de dónde surge el 30 o los 10. Una contraargumentación posible, en ese caso, sería: "¿Por qué no puedo desarmar el treinta y seis en tres y sesenta?". Este análisis implica el sentido de los números y operaciones que aparecen en la resolución. Otras intervenciones apuntan a la relación entre el procedimiento propuesto y la situación, es decir, de qué manera los cálculos modelizan la situación: "Estos quince, ¿de

qué cosa serían?", "¿Por qué una multiplicación me permite averiguar la respuesta?", etcétera.

- Hacer notar la diversidad de procedimientos tratando de encontrar semejanzas y diferencias.
- Promover el análisis de un procedimiento en términos del otro, es decir, cómo está representado cierto aspecto de la situación en uno y otro procedimiento. Por ejemplo: "En esta suma, ¿cómo me doy cuenta de que eran quince negocios?"; "¿Y en esta multiplicación?"; "¿Por qué el número trece aparece una sola vez en la multiplicación y en la suma aparece quince veces?".
- Las resoluciones erróneas también se constituyen en objeto de discusión del mismo modo que las correctas. Los procedimientos erróneos dan lugar a un trabajo muy fructífero en tanto exigen un análisis y reflexión sobre los conocimientos en juego: poder dar cuenta de por qué una respuesta es correcta o no y advertir dónde está el error demanda una explicitación y justificación en relación con los conocimientos en cuestión. Al respecto, Piaget (1976) decía: "Un error corregido [por el niño mismo] puede ser más fecundo que un éxito inmediato, porque la comparación de una hipótesis falsa y sus consecuencias provee nuevos conocimientos y la comparación entre dos errores da nuevas ideas". Además, este trabajo posibilita, en parte, el rechazo explícito de los conocimientos que subyacen a algunos errores, rechazo que Brousseau señala como constitutivo del sentido de los nuevos conocimientos. Esto no beneficia sólo al autor del procedimiento erróneo, sino también a aquellos alumnos que produjeron otras respuestas o procedimientos, tanto correctos como incorrectos. A veces, es el docente mismo quien propone una solución errónea como producida supuestamente por un chico de otra clase buscando desafiar a sus alumnos a que establezcan si es válida o no, que intenten explicar dónde reside el error y cómo se lo harían comprender al supuesto autor, introduciéndolos así en un juego de argumentación en relación con el contenido que se está trabajando.
- Proponen reflexionar acerca de las diferencias en términos de economía y confiabilidad. Un procedimiento es más económico cuanto más breve es su desarrollo y más confiable cuanto menos posibilidades de caer en errores conlleva. Desde el punto de vista de un adulto, que domina los procedimientos convencionales, éstos, a la vez de

resultar más económicos, resultan más confiables porque la menor extensión de su desarrollo disminuye las posibilidades de "perderse" o equivocarse y exigen menor atención por su automaticidad. Sin embargo, para un niño que aún no domina un procedimiento, estos criterios no son los mismos: procedimientos menos evolucionados pueden resultarle más confiables aunque costosos en extensión y tiempo. De hecho, para verificar un resultado obtenido mediante algún procedimiento nuevo, muchas veces, los alumnos recurren a procedimientos anteriores. La confiabilidad de un procedimiento depende de los conocimientos disponibles. La apropiación de procedimientos más económicos se realiza progresivamente, a través de situaciones que permitan la utilización, reflexión y sistematización de diferentes estrategias de resolución.

Con este análisis pretendimos puntualizar algunas orientaciones para que el maestro pueda abrir, guiar y sostener estos momentos en sus clases, de modo tal que se profundicen las discusiones, en lugar de cerrarse en un tratamiento superficial de las respuestas y procedimientos.

Reconocemos que trabajar desde esta concepción no es una tarea fácil para los docentes. Aun convencidos de la importancia de la actividad del alumno en la adquisición de los conocimientos, esta modalidad no deja de generarles dudas: ¿podrán todos?, ¿cómo intervenir para ayudar a quien no sabe cómo comenzar?, ¿no sería más seguro decirles lo que tienen que hacer?, ¿cómo es posible sostener provisoriamente conocimientos que no son del todo correctos?, etcétera.

Es cierto que este modelo de enseñanza es costoso en tiempo y, a veces, genera el temor de no avanzar tanto o de no poder llegar a seguir las progresiones que marca la institución escolar. Pero, por otro lado, es un camino inevitable en la construcción de los conocimientos si pensamos que el análisis y la reflexión que movilizan estas discusiones son elementos constitutivos de la comprensión de los conceptos. Piaget (1974) mostró que el éxito en la acción es sólo un nivel de la comprensión. El éxito puede involucrar solamente la utilización de los conocimientos, es una condición necesaria pero no suficiente de la comprensión. Esta última abarca niveles más profundos, consiste en extraer las razones, relaciones, implicaciones que superan ampliamente la relación entre objetivos y medios de resolución que involucra el éxito en la acción.

A pesar de lo arduo que este trabajo puede resultar para el maestro, es sorprendente y emocionante ver a alumnos tan pequeños pensando y reflexionando sobre sus producciones y las de sus compañeros, tratando de apropiarse de un conocimiento matemático, discutiendo sobre la pertinencia, el sentido, la validez. De este modo, se instala también el placer y la confianza en las propias posibilidades intelectuales y el poder compartirlas con otros.

Nos pareció pertinente, pues, detenernos a analizar estos momentos de las clases de Matemática, mostrándolos como espacios indispensables de los procesos didácticos y, a la vez, acercando a los maestros algunos elementos de su organización como herramientas disponibles a la hora de ayudar a sus alumnos en el avance de los conocimientos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

- Arsac, Gilbert; Gisele Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard y Michel Mante (1992): *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon.
- Balacheff, Nicolas (1982): "Preuve et démonstration en mathématiques au collège", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, n° 3, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Broitman, Claudia (1999): *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*, Buenos Aires, Novedades Educativas.
- Brousseau, Guy (1986): "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Charnay, Roland (1994): "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- ERMEL (1993): *Apprentissages numériques. CE1*, París, Hatier.
- (1995): *Apprentissages numériques. CE2*, París, Hatier.
- Gilly, Michel (1988): "Interacciones entre pares y construcciones

- cognitivas: modelos explicativos", en Anne-Nelly Perret-Clermont y Michel Nicolet (dir.), *Interactuar y conocer. Desafíos y regulaciones sociales en el desarrollo cognitivo*, Buenos Aires, Miño y Dávila.
- Laborde, Colette (1991): "Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques", en Catherine Garnier; Nadine Bednarz e Irina Ulanovskaya, *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale*, Bruselas, De Boeck.
- Lerner, Delia (1996): "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición", en José Antonio Castorina, Emilia Ferreiro, Marta Kohl de Oliveira y Delia Lerner, *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*, Buenos Aires, Paidós.
- Lerner, Delia; Patricia Sadovsky y Susana Wolman (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico", en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Parra, Cecilia e Irma Saiz (comps.) (1994): *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- Piaget, Jean (1974): *Réussir et comprendre*, París, Presses Universitaires de France.
- (1976): "Le possible, l'impossible et le nécessaire", en *Archives de Psychologie*, XLIV.
- Saiz, Irma (1995): "¿Confrontación o corrección?", trabajo elaborado para el curso sobre "La resolución de problemas en la escuela primaria", dictado en la Escuela Normal de San Luis del Palmar, Corrientes, mimeo.
- Vergnaud, Gérard (1979): "Problemas aditivos y complejidad psicogenética", en César Coll (comp.): *Psicología genética y aprendizajes escolares*, México, Siglo XXI.
- (1986): "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n° 2/3, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas.
- Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Subsecretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, Actualización curricular: *EGB, Documento de trabajo N° 4: Matemática*.

LA DERECHA... ¿DE QUIÉN? UBICACIÓN ESPACIAL EN EL NIVEL INICIAL Y EL PRIMER CICLO DE LA E.G.B

Irma Elena Saiz

1. INTRODUCCIÓN

Desde muy pequeños, los niños van aprendiendo a organizar sus desplazamientos en un espacio cada vez más amplio y elaborando sus diversos conceptos acerca del espacio. Piaget (1973) ha descripto con mucha precisión cómo un niño inicia y desarrolla el proceso de construcción del espacio, un espacio que se amplía cada vez más, junto con las posibilidades del sujeto de acceder a lugares cada vez más alejados y a su independencia del adulto en estos descubrimientos. Los aprendizajes espaciales que se inician desde sus primeros movimientos y que continúan a lo largo de la infancia y de la adolescencia se basan tanto en las acciones que efectivamente tuvieron lugar en el espacio como en las interacciones que con objetos, personas o lugares realiza cada niño. La imitación de los comportamientos de adultos, de otros niños y los intercambios orales a propósito de las localizaciones de los objetos, los

1. Este artículo retoma algunas experiencias y reflexiones realizadas por la autora en el marco de la investigación "La representación del espacio y la enseñanza de la geometría en la escuela primaria y preescolar", dirigida por la Dra. Carmen Sessa y financiada por el Conicet (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina).

desplazamientos, las acciones y sus efectos constituyen fuentes de conocimiento para el niño.

Liliane Lurçat (1976) llama directa e indirecta a estas dos fuentes de conocimiento. En la primera, los conocimientos provienen de las actividades cotidianas, a través de los desplazamientos y de la manipulación de objetos. En la segunda son transmitidos por el entorno por medio del lenguaje, principalmente en la denominación de la ubicación de los objetos y de los lugares, así como en las consignas y en las prohibiciones que se refieren a ellos. Con frecuencia, la acción del niño es provocada por una consigna del adulto o es una acción infantil la que provoca la intervención del adulto bajo la forma de una prohibición o del aliento a continuarla. Si bien ambas fuentes, directa e indirecta, tienen un origen y una utilización práctica, en la segunda existe un importante componente verbal.

Los niños, tanto como los adultos, necesitan manejar relaciones espaciales en su vida cotidiana, en la ubicación o búsqueda de objetos o, más en general, en la manipulación de objetos, en los desplazamientos en un barrio o en una ciudad, pero también en la propia casa, en la construcción o uso de distintos objetos, en las informaciones espaciales que demandan o que reciben y aun en las instrucciones para realizar acciones, etcétera. Ubicarse en el espacio significa también ser capaz de utilizar un vocabulario que permita diferenciar e interpretar informaciones espaciales.

Pero la ubicación en el espacio no es evidente. El propio cuerpo de un sujeto puede ser utilizado para estructurar el espacio que lo rodea, puede delimitarse la zona que se encuentra a su derecha, la que se encuentra a su izquierda, adelante o atrás. A su vez, "cada objeto del espacio estructura el espacio que lo rodea: aparece como el centro de un plano local en el cual las grandes polaridades son las mismas del esquema corporal: adelante, atrás, derecha, izquierda, arriba y abajo. Pero los planos que rodean a los objetos se superponen e interrelacionan, tanto como con el plano atribuido al propio cuerpo. Aparecen así grandes conflictos que nacen de la interpenetración de esos planos" (Lurçat, 1976).

Además del espacio que rodea a un sujeto, el mismo cuerpo puede ser orientado y hablamos así de su parte derecha y su parte izquierda, que se mantienen constantes a través de los desplazamientos o movimientos del sujeto. No sucede lo mismo con los objetos que han sido orientados a partir del cuerpo: los que en un momento dado pueden estar a la derecha de Juan, al rotar éste, pasan a encontrarse a la izquierda de Juan, si bien las partes

derecha e izquierda de su cuerpo siguen siendo las mismas. De la misma manera se modifica la ubicación de los objetos cuando se utilizan las referencias de adelante o atrás a partir de propio cuerpo.

La confusión entre orientación en el cuerpo y orientación en relación con el cuerpo puede aparecer también en los objetos orientados. Por ejemplo, después de comprar entradas para el teatro, alguien podría afirmar: "Conseguí entradas *adelante*", refiriéndose al sector del teatro más cercano al escenario, y a la vez informar: "Te esperaré *delante*² del teatro". En el primer caso se estaría utilizando la orientación *en* el teatro, y en el segundo, la orientación *con respecto* al teatro, mencionando un lugar: *delante* del teatro, que físicamente podría encontrarse muy cerca del que una vez dentro del teatro llamaríamos *atrás*.

En un inicio, el niño tiene como referente a su propio cuerpo y describe la posición de los objetos o personas que están cerca de sí, con respecto a su propia orientación. Cuando llega al Nivel Inicial, ha empezado a abandonar ese sistema de referencias egocéntrico, centrado en su propio cuerpo y en su propia acción, para incorporar referentes fijos, objetivos, logrando describir ubicaciones con respecto a otras personas u objetos. Aprende así a ubicarse como un objeto más entre otros, marcando un gran avance a lo largo de cuatro o cinco años de vida en su conocimiento del espacio y de su ubicación en él. Pero este camino está lejos de estar terminado.

La mayor parte de los conocimientos espaciales son tributarios del margen de autonomía que el medio les ofrece a los niños. Es conocida la capacidad de algunos de ellos, que habitan villas "laberínticamente" construidas, de ubicarse en ellas y aun en otros lugares desconocidos mientras que niños de la misma edad pero pertenecientes a otros medios sociales difícilmente se desplacen con autonomía aun en espacios más acotados como su barrio. Esto concuerda con los resultados de una investigación³ (posterior a los trabajos de Piaget) que cuestionan la evolución de las posibilidades espaciales de los alumnos en la clásica jerarquía topológica, proyectiva y métrica, y afirman que las representaciones de las zonas o de los objetos familiares se organizan según reglas proyectivas o métricas, mientras que los espacios "pobremente conocidos" o contingentes

2. En el punto 4 se discutirá la diferencia entre "delante" y "adelante".

3. Trabajo de síntesis elaborado por Pêcheux (1990).

son aprehendidos a nivel topológico. En este mismo orden de ideas, plantean la casi imposibilidad de hablar de un desarrollo unificado y general para todos los sujetos; los conocimientos espontáneos serían muy diferentes en función del sujeto y de sus experiencias. Otros cuestionamientos se relacionan con la insuficiente consideración, dentro de la teoría de Piaget, de las características de las situaciones en las cuales el sujeto establece las interacciones espaciales. Finalmente, se plantean si en el dominio espacial el mínimo conocimiento adquirido por todos no será particularmente bajo y si su adquisición es suficiente para asegurar a los sujetos los medios de una adaptación autónoma a las evoluciones de sus condiciones de vida.

En relación con este último aspecto, los resultados de numerosas investigaciones, e incluso la simple observación de las actuaciones de algunos adultos, hablan de las dificultades a las que muchos se enfrentan al querer orientarse en un lugar nuevo, describir oralmente o en un croquis el recorrido para llegar a un cierto lugar, relacionar un lugar de la realidad con su representación en un plano o mapa si se encuentra girado,⁴ leer o elaborar planos, representar gráficamente objetos espaciales, etcétera. Cierta cantidad de adultos no ha logrado, a través de sus interacciones extraescolares con el ambiente, desarrollar una concepción del espacio que les permita un control adecuado de sus relaciones espaciales.

Lo anterior indica que la adquisición espontánea de estos conocimientos no es suficiente en muchos casos y que tal vez sería necesario que la institución escolar asumiera entre sus responsabilidades la de instrumentar situaciones en las que los niños y jóvenes puedan articular el desarrollo espontáneo de las nociones espaciales con la adquisición de conocimientos escolares necesarios para la vida en sociedad y para los aprendizajes matemáticos o profesionales posteriores.

En lo que atañe a los diseños curriculares de la escolaridad obligatoria, es en el Nivel Inicial y en el primer ciclo de la EGB donde aparecen algunos contenidos relativos a la construcción del espacio que permitirían al niño ubicarse en él y situar a los seres y objetos en función de sí mismo y en relación con otros objetos.

4. Esta dificultad es muy conocida por los "acompañantes" cuando, en un recorrido en auto, han identificado en un plano o mapa la bifurcación que es necesario tomar pero dudan si, en la realidad, deberían dar la indicación de girar a la izquierda o a la derecha.

No obstante, en el trabajo diario de la escuela, el tratamiento de tales contenidos se reduce con frecuencia a tratar de lograr mayor precisión en el vocabulario habitual de los niños de esa edad, precisión que se alcanzaría al utilizarlo en consignas simples que incluyan tales relaciones y al pedirles que las describan o se ubiquen siguiendo consignas como: "Juan está a la derecha de María", incluidas en juegos o en situaciones fácilmente resolubles con bajo costo cognitivo.

Acordamos, sin embargo, con Berthelot y Salin (1992), quienes plantean una hipótesis en relación con la necesidad de conceptualizar:

Nos apoyamos en la hipótesis de que la conceptualización aparece cuando la actividad sensorio-motriz inmediata no permite resolver el problema planteado y que según el tipo y la importancia de las limitaciones impuestas a la acción del sujeto, las conceptualizaciones correspondientes pueden ser más o menos elaboradas.

Agregan, además, que las situaciones que producirían tal necesidad son aquellas en las cuales el sujeto está sometido a restricciones y condiciones más fuertes que las de las acciones espaciales, condiciones que lo *obligan a diferir su acción y a anticipar sus efectos*, es decir, aquellas en las cuales la problemática práctica no es suficiente.

Si bien la definición de problemática práctica, para estos autores, se inserta en una discusión mayor sobre diferentes tipos de problemáticas y de su articulación, podemos retomar la cita de Bourdieu (1980), que incluyen los autores, sobre la práctica:

La práctica sólo conoce casos particulares y los detalles del interés práctico o de la curiosidad anecdótica [...]. Excluye todo interés formal. La revisión reflexiva sobre la acción misma, cuando ocurre (es decir, casi siempre cuando se fracasa en los automatismos) queda subordinada a la búsqueda del resultado y a la búsqueda (que no percibe necesariamente como tal) de la maximización del rendimiento del esfuerzo realizado.

Siguiendo esta línea de ideas se podría afirmar que es necesario plantear en la escolaridad situaciones específicas de los conocimientos espaciales que permitan a los alumnos "ir más allá" de lo que las actividades cotidianas y los juegos les permiten construir.

2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SITUACIONES PLANTEADAS

Como mencionamos anteriormente, las actividades tradicionales de ubicación espacial, especialmente en el Nivel Inicial y a veces en primer año de la EGB, que tienen como objetivo declarado que el niño aprenda a situarse y situar los objetos en el espacio, no plantean en general situaciones donde los alumnos sean los responsables de:

- buscarles una solución;
- decidir, explícitamente o no, "qué usar" para resolverlas, es decir, determinar cuáles pueden ser los saberes a poner en juego;
- poner a prueba la solución encontrada.

Se trata, por ejemplo, de responder con una acción a consignas dadas por el docente o el autor del libro: pintar la pelota que está *debajo* de la mesa o rodear el perro que está *a la derecha* del árbol. No es habitual en los libros de texto o en las aulas que, además, se demande a los alumnos elaborar consignas de este tipo, es decir elaborar, un vocabulario pertinente y hacerlo funcionar en situaciones que así lo requieran. Estas actividades tampoco están insertas en un contexto que les dé sentido a las cuestiones que se plantean.

Todo haría suponer que se está reduciendo el aprendizaje de la ubicación en el espacio al aprendizaje de un vocabulario de uso bastante habitual en la vida de los niños y del cuál sólo sería necesario lograr cierta precisión en las formulaciones de las relaciones espaciales. Se estaría esperando que se sigan produciendo aprendizajes espaciales o se afiancen los ya aprendidos, de manera similar a como se producen en situaciones extraescolares, en cuanto a la transmisión de conocimientos por medio del intercambio verbal de relaciones espaciales, localizaciones o posiciones. Pero las situaciones propuestas no tienen en cuenta que en las situaciones anteriores a la escolaridad o extraescolares, las acciones poseen una finalidad y los niños establecen relaciones efectivas con el medio. Se trata de un aprendizaje didáctico del lenguaje espacial, es decir, de un aprendizaje que queda determinado por la intención del docente y no por la situación que plantea al alumno la necesidad de tal conocimiento; en ningún momento el alumno es puesto en situación de hacerlo funcionar como un lenguaje informativo, es decir, como recurso para comunicar una

información a alguien que no la posee o recibir una información que le permita actuar.

Si se pretende, entonces, hacer jugar a los conocimientos espaciales las mismas funciones informativas que juegan en las situaciones de comunicación de referencia, será necesario involucrar a los niños en situaciones donde tales conocimientos de orientación y ubicación sean conocimientos pertinentes para resolverlas.

Para ello, puede recurrirse a las situaciones de comunicación, introducidas por Brousseau (1986) dentro de su teoría de situaciones didácticas. Una situación de comunicación es una situación que pone en juego dos participantes A y B⁵ (A y B pueden ser individuos, grupos de individuos o computadoras). B debe realizar una tarea precisa pero tiene necesidad de la información que posee A para poder realizarla correctamente. Para permitir a B que logre su tarea, A debe comunicarle la información. Dado que A y B son compañeros, no competidores, es importante que la comunicación sea buena entre ellos, es decir, que A quiera ser comprendido por B. Para ello, A debe comunicarle la información adecuada en el contenido y en la forma necesaria para que B interprete correctamente lo que le transmite.

En las secuencias que se elaboraron y se incluyen en este capítulo, se busca un funcionamiento "a-didáctico" de los alumnos frente a la situación planteada, es decir, un funcionamiento independiente del docente en cuanto a que éste deja de ser el proveedor del conocimiento necesario para la resolución del problema. El desarrollo de situaciones a-didácticas⁶ y el establecimiento de relaciones a-didácticas de los alumnos con la situación garantizaría una mejor calidad de los aprendizajes ligada al hecho de que los alumnos sean capaces de atribuir un significado próximo al de las prácticas de referencia de los conocimientos elaborados.

5. Se sigue aquí la descripción realizada por Laborde (1995).

6. "El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego" (comentario de Berthelot y Salin [1992] acerca de la noción debida a Brousseau [1986]). Véase el capítulo 2, en este mismo libro.

Si bien se trata de situaciones didácticas, es decir, organizadas por el docente para hacer adquirir a los alumnos un saber específico, se incluye en ellas la redacción de un mensaje y su envío a otro equipo, lo que constituye una fase a-didáctica: los alumnos deben determinar por sí mismos las relaciones espaciales en juego y formularlas en un vocabulario comprensible por los receptores del mensaje. El logro o no de la tarea por parte de los receptores les permitirá conocer la validez y la pertinencia de la información utilizada para elaborar el mensaje.

Dentro de la teoría de las situaciones didácticas, este tipo de situaciones prevé una fase en la cual los dos compañeros A y B confrontan lo que obtiene B con lo que debería haber obtenido. Pueden entonces tratar de comprender por qué la producción de B no es la esperada y analizar el mensaje y/o su interpretación. Las situaciones de confrontación de las producciones y de análisis que organiza el docente permiten que los alumnos reflexionen sobre los conocimientos puestos en juego, sus ambigüedades —si existieran— y, fundamentalmente, busquen de manera colectiva formas de comunicación adecuadas.

Sin embargo, dado que se trata de hacerse entender por el equipo receptor, puede ocurrir que el equipo emisor A sea comprendido por B a pesar de no emplear un vocabulario adecuado o que su mensaje contenga implícitos. Los alumnos pueden comprenderse dado que con frecuencia comparten implícitos o concepciones erróneas sobre los objetos matemáticos. Éstos son algunos de los límites que pueden presentar estas situaciones, especialmente si son empleadas únicamente como trabajo de los alumnos y sin intervención docente, pero este último puede, en una fase de confrontación posterior, ayudar a los alumnos a analizar los mensajes y sus ambigüedades, si las hubiera.

En las situaciones que se plantean a continuación, se trata, entonces, de organizar un proceso de elaboración colectiva de conceptualizaciones respecto de la organización del espacio (en el caso de la primera secuencia) y de orientación de los objetos (en el segundo caso) donde la representación del espacio tenga un carácter funcional, es decir, que se ponga al servicio de una tarea de comunicación de posiciones.

3. SECUENCIA DIDÁCTICA: "LA GRANJA"

3.1. Ficha didáctica

Destinado a alumnos del Nivel Inicial

Materiales

- Juguetes o elementos pequeños que se presten para armar una escena, idénticos para cada uno de los equipos. Por ejemplo: dos vacas (de diferente color), un caballo, cinco bardas que permiten construir un corral o usarlas como cercas para separar distintos objetos, un pastor, un perro, un puente, un molino, dos casitas y dos árboles. Estos materiales corresponden a objetos, animales y personas habituales en una granja, de allí el nombre de la secuencia.
- Un cartón o cartulina (del tamaño de una hoja oficio) para cada equipo, sobre el que realizará el armado, y una mesa para cada equipo.
- Una estera, biombo u otro elemento divisorio.

Objetivos

- Determinar relaciones espaciales entre los objetos que permitan definir unívocamente la ubicación de cada uno de ellos en un marco de referencia.
- Elaborar un lenguaje apropiado para comunicarlos sin ambigüedad.
- Interpretar las referencias dadas para reproducir una situación espacial determinada.

Descripción de la actividad

Organización de la clase

Los alumnos trabajan organizados en un número par de grupos formados por 2 o 3 alumnos cada uno. La mitad de los grupos de

la clase funcionarán como grupos emisores y la otra mitad como receptores (denominados en este texto, respectivamente, grupos A y B). Los dos grupos que se correspondan deberían estar a cierta distancia o separados por un biombo que impida ver la actividad del otro grupo.

Consigna

Ustedes (dirigiéndose a los equipos emisores A) van a armar lo que quieran sobre la hoja con todos esos juguetes y no los van a mover más. Ustedes (dirigiéndose a los grupos receptores B) tienen los mismos juguetes que ellos y tienen que armar una granja igual. Para que ellos puedan hacerlo, ustedes (los del grupo emisor) tienen que decirles cómo armarla. Las dos granjas tienen que quedar iguales. Ninguno de los grupos puede mirar lo que está haciendo el otro. Tienen que organizarse para dictar lo que quieran decirle al otro grupo. Ustedes (dirigiéndose al equipo B) van a escuchar y van a ir armando como ellos les dicen. Cuando terminen, vamos a juntar las dos mesitas y van a ver si salieron iguales.

Desarrollo

- PRIMERA FASE: Descripción de la escena.
El grupo emisor (A) arma su escena y se organiza para dictar. Si bien en las primeras realizaciones pueden elegir al niño que realizará el dictado, es importante que en las siguientes el docente asegure la rotación de los alumnos para que todos participen. Cuando los niños creen haber terminado, el docente los interroga sobre si consideran que ya dijeron todo lo que querían decir y si creen que ya es suficiente.
- SEGUNDA FASE: Confrontación de las construcciones.
Se retira el biombo, se acercan las dos construcciones y se comparan. El docente cuida que los niños no modifiquen la construcción mientras expresan las coincidencias o diferencias y guía la discusión preguntando en el caso en que no

coincidan las configuraciones, por ejemplo: "¿Qué deberían haber dicho para que se entienda?"; "¿Faltó decir algo más?"; "¿Sirve decir... (repitiendo algún término utilizado por los niños)?"; "Si no sirve, ¿cómo sería mejor decirlo?", etcétera.

- TERCERA FASE: Descripción del otro grupo y confrontación de las construcciones.
Se invierten los roles, el grupo que en la primera fase actuaba como receptor (grupo B) es el que arma la escena y la describe para que los niños del otro grupo puedan reproducirla.
Una vez terminada, se acercan las construcciones y se comparan, señalando las diferencias y coincidencias y las posibles formulaciones para la ubicación de los objetos no lograda.
- CUARTA FASE: discusión colectiva e institucionalización de acuerdos.
El docente organiza una discusión colectiva sobre las dificultades encontradas en el desarrollo de la actividad. Retoma las preguntas realizadas en las confrontaciones anteriores y presenta a discusión las principales cuestiones que impidieron la reproducción. Se trata de llegar a acuerdos sobre la forma más adecuada para lograr la tarea.
Las conclusiones de los niños son retomadas por el docente, formuladas claramente si es necesario, asignándoles un estatus de conocimientos disponibles para el siguiente juego. Por ejemplo: la indicación "al lado de la casita" no es suficiente para ubicar un objeto, es necesario precisar de qué lado se ubica.
- CONTINUACIÓN
Se organiza nuevamente el juego, asumiendo cada grupo alternadamente los roles de emisor y receptor; los alumnos pueden poner en juego los acuerdos alcanzados.

3.2. *Análisis a priori de la secuencia*

Análisis de la tarea en el dictado, construcción y comparación de construcciones

Como dijimos en el apartado 2 de este capítulo, se trata de una situación de comunicación en la que uno de los grupos posee la información necesaria para armar una granja similar a la propia, pero no puede armarla por sí mismo, y debe darle al otro grupo las indicaciones necesarias para que éste pueda hacerlo. El grupo receptor, en cambio, tiene la posibilidad de actuar armando la granja, pero no dispone de la información necesaria.

Lograr que los niños del grupo receptor puedan construir una granja igual a la que armaron los del grupo emisor exige de éstos la formulación de indicaciones para armarla. Las descripciones emitidas por el grupo A deben poder ser interpretadas como consignas de construcción por los integrantes del equipo B. Esta secuencia demanda a los niños organizar el espacio de la hoja con los objetos que se encuentran en ella. Es decir, lograr transformar una hoja y una colección de objetos colocados encima de ella en forma más o menos caótica, en un espacio organizado en función de las relaciones de proximidad o ubicación de los distintos objetos entre ellos y con la hoja que le sirve de marco de referencia, donde sea posible determinar quién está detrás de quién o quién está en el centro de la hoja, etcétera.

Dado que ambos grupos poseen los mismos elementos para el armado, es claro que la información que puedan proveer sobre la ubicación en la hoja de cada uno de ellos es una información pertinente. Esto les exige establecer un orden de los objetos para su dictado que les permita asegurar la localización de todos los objetos sin omisión ni repetición. Como no pueden marcarlos ni apartarlos —ya que eso alteraría la configuración realizada—, deben establecer un orden mental que les permita asegurar el control intelectual de la acción.⁷

Considerado desde el punto de vista de una descripción, el grupo A podría reiterar la localización de uno o varios objetos. Esta información, aparentemente redundante, puede no aparecer como tal para el grupo B y por el contrario significar una complejidad adicional, dado que, al no disponer

7. La tarea de contar objetos es analizada ampliamente por Bartolomé y Fregona en el capítulo 4 de este volumen.

ya de tal objeto, debería convertirse en una consigna de verificación del ya colocado. Por ejemplo, si se reitera la descripción de la ubicación de una casita, especialmente cuando se trata de una descripción diferente de la ya formulada, es necesario que el grupo B interprete que, dado que esa casita ya está colocada, no se trata de una instrucción para colocar una nueva sino que puede ser utilizada como control de la ubicación de la casita que ya había sido descrita.

No es indispensable en el dictado establecer un orden total, en el sentido de que necesariamente cada uno de los objetos pueda ser definido en función del anteriormente colocado, ya que, en forma independiente de la configuración seleccionada por los niños y debido a las características del material, seguramente podrán identificarse algunas subcolecciones de elementos cercanos, formando configuraciones locales, relacionados o no por la función que cumplen y que puedan ser descriptos sin referencia a los demás. Así, por ejemplo, podría identificarse una subcolección de elementos formada por el corral con las vacas y el caballo.

Para ubicar esas subcolecciones es necesario que, al describirlas, se “ancla” uno o más de sus elementos en la hoja. Para ello pueden seleccionarse algunos puntos o regiones “especiales” de la hoja como el centro, arriba a la derecha, abajo a la izquierda, etcétera, como puntos de referencia externos a la configuración armada. Para la descripción de la siguiente subcolección puede seleccionarse un nuevo objeto, localizado en relación con la hoja o con algunos de los ya colocados. Si los objetos que definen los subconjuntos pueden ser correctamente localizados a partir de puntos de referencia externos a esos objetos, no es necesario que estén relacionados con elementos dictados anteriormente.

Todo este proceso debería realizarse sin perder el control sobre los objetos ya dictados y los que falta aún ubicar. La consideración de configuraciones locales facilita en muchos casos que, a pesar de realizarlo entre varios niños, el dictado pueda ser exhaustivo y sin repetición, ya que cada uno podría responsabilizarse de una de tales configuraciones sin necesidad de compartir el mismo orden mental entre todos los objetos de la escena.

Por otra parte, además de la ubicación de los objetos en la hoja, se debería considerar su posición, dado que las “vacas” pueden estar dentro del corral y ser, por lo tanto, fácilmente ubicables pero con posiciones diferentes, es decir, orientadas en distintos sentidos, y esa orientación se debería incluir en la descripción realizada.

El proceso previsto para hacer funcionar el conocimiento en esta secuencia parte de enfrentar a los niños a una tarea que los obliga a determinar relaciones espaciales entre los objetos para establecer puntos de referencia en la hoja de papel, a buscar formulaciones adecuadas para transmitirlos y para lograr que el equipo B pueda reproducir la configuración. Para ello utilizarán sus conocimientos previos sobre ubicación espacial, conocimientos tal vez incorrectos, incompletos o no pertinentes en la situación.

Las relaciones espaciales que establecen los distintos niños no son necesariamente coincidentes entre ellas, como tampoco lo serán las descripciones realizadas, permitiéndoles así a unos y otros tomar contacto con formulaciones diferentes de las propias. Por otro lado, los cuestionamientos del grupo B y, posteriormente, la confrontación de las dos configuraciones permiten a los niños tomar conciencia del efecto de sus formulaciones y de la necesidad de una mayor precisión. Estos dos aspectos se constituyen así, para ellos, en recursos de control.

La primera realización del juego estará seguramente marcada por imprecisiones en el dictado, olvido de algunos elementos y descripciones ambiguas, pero también la construcción de la granja por el otro grupo, a partir de esa descripción, será realizada casi sin discusiones y todos —emisores y receptores— tendrán la convicción de que resultarán granjas idénticas. Recién en la confrontación podrán empezar a percibir que no fue suficiente lo que se dijo, ni cómo se dijo. Esa primera vez permite a los niños tomar conciencia de la situación que se les plantea. En la segunda realización, las consideraciones espaciales empiezan, con frecuencia, a explicitarse desde la construcción, ya que los niños consideran, al ubicar los objetos, las dificultades a las cuales se enfrentarán al realizar el dictado. La construcción misma estará seguramente influenciada por la necesidad —posterior a la construcción— de describirla.

La secuencia prevé momentos de discusión colectiva sobre las dificultades encontradas y sobre las posibilidades de mejorar la descripción para permitir la reproducción. Las institucionalizaciones⁸ parciales por parte del docente a partir de pequeños “acuerdos” pueden constituirse en escalones

8. “La consideración ‘oficial’ del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización” (Brousseau, 1994).

firmes sobre los cuales apoyarse para hacer evolucionar los conocimientos. Por otra parte, deberían permitir que las relaciones espaciales que se determinen sean identificadas, nombradas y caracterizadas.

Desde la primera consigna, los alumnos se encuentran insertos en una verdadera problemática para ellos, dado que no sólo tienen que establecer relaciones espaciales que permitan ubicar cada uno de los objetos sino también determinar que la organización del espacio en juego —hoja de papel y objetos— pueda ser un recurso de solución de la tarea propuesta. Se trata de un funcionamiento a-didáctico de la situación, como se mencionó en el apartado 2.

Determinar que la ubicación de los objetos en la hoja puede constituirse en el recurso para lograr que el otro equipo pueda cumplir con su tarea se justifica por la lógica interna de la situación y no por “adivinar” el deseo, explícito o no, del docente.

Si la consigna planteada fuera: “Díganles dónde está cada uno de los objetos de la escena para que ellos puedan ponerlos en el mismo lugar que ustedes”, quedaría bajo la responsabilidad de los niños solamente determinar y formular las relaciones espaciales, pero la consigna ya estaría comunicando que la ubicación espacial de cada objeto pueda ser un recurso de solución.

Rol del docente

El docente juega en esta secuencia un rol fundamental dado que es el responsable de la organización de las etapas de descripción y de comparación de las configuraciones, pero además cumple un rol especial en la discusión que se plantea frente a las diferencias entre ambas. En los momentos de validación debe retomar las dificultades de los niños, formularlas en términos que permitan su discusión y lograr el arribo a conclusiones que, aunque provisionales, permitan hacerlos avanzar. Finalmente, en las institucionalizaciones, caerá también bajo su responsabilidad identificar, nombrar y caracterizar el conocimiento, otorgando un *status* a las formulaciones de los niños, relacionando sus producciones con los conocimientos culturales y posibilitando su reutilización en otras situaciones.

Los materiales

Los objetos se eligieron de manera de permitir la construcción de una configuración que tuviera un significado para los niños, por ejemplo, una

granja o una plaza, según los elementos de los que se disponga. El número de objetos presentes debe ser determinado atendiendo a dos condiciones: por un lado, los elementos deben permitir construir una escena, como ya se dijo, que le otorgue sentido a la tarea y, por otro lado, tratarse de una cantidad tal que obligue a recurrir a relaciones espaciales para su descripción. Si hubiera pocos objetos, por ejemplo cuatro, la descripción de su ubicación podría ser realizada sin recurrir a una estructuración precisa del espacio y estableciendo muy pocas relaciones espaciales entre los objetos y en relación con la hoja. Hemos considerado que un número de aproximadamente quince objetos puede cumplir con ambas condiciones, pero no hemos experimentado con otras cantidades. Cabe aclarar que la presencia de varios objetos de la misma naturaleza como tres vacas o cinco cercas, permite que sean dictados en una sola frase y disminuir el número de localizaciones realizadas. Permite, por ejemplo, dictar: "Las vacas están dentro del corral mirando a la casa".

Por el tipo de objetos involucrados, la actividad de la granja favorece la aparición de ciertas nociones espaciales como: atrás, adelante, derecha, izquierda, al lado, etcétera, pero no garantiza la utilización de otras como arriba y abajo.

La actividad en el Nivel Inicial o primer año de la EGB

Para la utilización de esta actividad con niños del Nivel Inicial o de primer año de la EGB es necesario adecuar algunos aspectos, mientras que otros se mantienen tal como fueron descriptos por los argumentos ya mencionados. Por ejemplo, el docente puede organizar la actividad con la mitad de la clase formando, por ejemplo, cuatro grupos: dos emisores y dos receptores, dado que los niños más pequeños necesitan mayor presencia del docente.

Antes de la aplicación de esta secuencia es conveniente que los alumnos hayan tenido oportunidad de conocer el material sin las restricciones de las consignas de la secuencia. Puede ser entregado como material de juego en días anteriores y organizar posteriormente una actividad más simple, por ejemplo de reproducción de una configuración: un grupo arma lo que desea con los objetos y el otro grupo debe reproducirlo exactamente en un lugar un poco alejado del primero, para ello puede ir a observar el modelo original las veces que lo considere necesario. Posteriormente, los dos comparan las configuraciones y observan si existen diferencias entre ellas y los motivos de esas diferencias, si ése fuera el caso.

Los objetos deben ser elegidos de un tamaño tal, en relación con la hoja en la que se construye la escena, que exima a los niños de precisiones de medidas. Dado que al colocar los objetos éstos cubren casi totalmente la hoja, sus localizaciones pueden establecerse en función de referencias como atrás, entre el árbol y la casa, etcétera, sin necesidad de una mayor precisión en las distancias entre los objetos.

Por otra parte, la consideración de la ubicación del grupo responsable de formular el mensaje en relación con la escena armada y a su vez de la ubicación del grupo que reconstruye la granja aparece como una dificultad casi insalvable para niños tan pequeños. Por eso, los grupos deben ubicarse del mismo lado de las mesas colocadas en la misma dirección, formando una línea los 6 u 8 alumnos así como las dos mesas, como se ve en el esquema (figura 1). Este aspecto será considerado en los apartados 4 y 5 de este capítulo cuando se analice el trabajo con la secuencia "El tobogán".

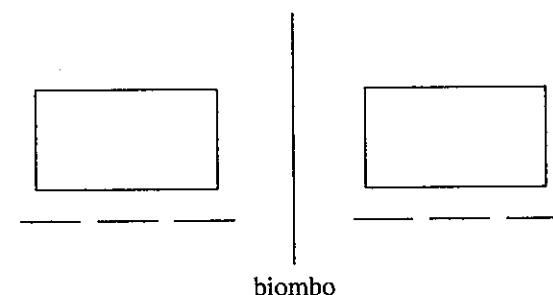


Figura 1

3.3. Funcionamiento de la secuencia en las clases

La experimentación de la secuencia con distintos grupos⁹ de 5 años del Nivel Inicial nos brindó variada información sobre las cuestiones que nos planteábamos en el análisis a priori de la secuencia (apartado 3.2). Pudimos observar una desigual participación de los niños, con bastante reticen-

9. Los grupos escolares pertenecen a las escuelas Jardín N° 10 "Las ardillitas", Jardín N° 21 "Casita Encantada" y Kinder del Saint Patrick College de Corrientes. Agradecemos a

cia al principio y con entusiasmo al final en muchos casos. Aunque un único alumno realizara el dictado, sus compañeros seguían atentamente la descripción, indicando incluso los objetos que aún faltaban describir. En las comparaciones y los comentarios sobre el origen de las diferencias vimos que también participaban alumnos que no lo habían hecho en la descripción y que, sin embargo, habían seguido con mucha atención el desarrollo del dictado.

El dictado

Podemos iniciar este análisis refiriéndonos a las dificultades de los alumnos para establecer relaciones espaciales y encontrar formulaciones válidas para permitir al otro grupo reproducir la configuración.

- La falta de precisión en indicaciones como “poné al lado del árbol”, sin especificar a cuál de los dos lados se refieren. Estas formulaciones evolucionan en concordancia con la posibilidad de controlar la similitud de ambas construcciones como veremos más adelante, pero se enfrentan a la enorme dificultad del uso de la derecha y la izquierda.
- El uso, por parte de algunos emisores, de referencias a la derecha o izquierda de la hoja o de los propios niños fue cuestionado por los receptores por no poder comprenderlas. Ante la intervención de la docente, indicando que trataran de buscar alguna otra formulación que comprendieran sus compañeros, algunos niños recurrieron a puntos de referencia externos a la configuración: el pizarrón y las ventanas para indicar respectivamente el lado derecho o el izquierdo de la hoja. Estas referencias fueron comprendidas claramente por el equipo receptor, ya que permiten la ubicación de los elementos independientemente de la lateralidad del emisor y del receptor.
- Con referencia a las relaciones espaciales establecidas, encontramos las distintas maneras de atribuir una lateralidad a los objetos como señalan los estudios psicológicos analizados (Lurçat, 1976). Los niños determinan las referencias de un objeto que se encuentra frente a ellos, reali-

las docentes Liliana Lena, Graciela Mauriño y María Elena Merlach los interesantes intercambios de opiniones y aportes así como el permitirnos la observación de las clases.

zando una *traslación* de las referencias propias del sujeto, una *simetría* o una *rotación* de las referencias del sujeto. Estas consideraciones serán analizadas más adelante, en la secuencia del tobogán.

- En las descripciones realizadas encontramos distintos usos del término “adelante”: adelante en la hoja (cerca del sujeto), adelante de las casas (zona alejada del sujeto) o bien adelante de las casas (en función de las puertas de esas casas, sin referencia al sujeto que describe). Claramente, niños tan pequeños no pueden distinguir y dominar el uso de significados tan diferentes del mismo término. En la actividad, algunas veces pueden solucionar las dificultades en función del contexto. Por ejemplo, “el pastor delante de la casa” permite ubicar correctamente al pastor ya que dan por supuesto que está saliendo de la casa o por entrar a ella, aunque esta expresión no defina la orientación de su cuerpo.
- En algunos casos, al describir la posición de uno o varios objetos iguales (casitas, vacas, etcétera) no aclaran si se trata de uno, dos o todos. La falta de precisión numérica es superada con facilidad cuando es indicada por el grupo receptor, ya sea durante el dictado o en la comparación de las construcciones.
- Por supuesto, algunos grupos emisores consideran suficiente —especialmente en la primera realización de la secuencia— enunciar uno a uno los distintos objetos sin precisar su ubicación o dictar las configuraciones locales sin precisar su ubicación en la hoja. También puede ocurrir, y pudimos observarlo, que los niños dicten las colecciones de objetos similares, independientemente de su ubicación. Por ejemplo, “Poné las casitas” aunque estén ubicadas en distintos lugares. Luego siguen con las vacas, las cercas, y así sucesivamente. Descripciones como las anteriores casi aparecen únicamente en el primer dictado, ya que en la confrontación, o incluso a veces durante el dictado, los niños del grupo receptor demandan la localización de los distintos objetos o subcolecciones en el primer caso o reclaman que no especificaron cuáles objetos estaban en una posición y cuáles en otra, aunque se trate en ambos casos de objetos similares.
- En muy pocas ocasiones se incluyó en la descripción la orientación de los objetos. Si bien, al comparar las dos configuraciones, algunos alumnos comentaron “está mirando para el otro lado”, o bien “el pastor está saliendo de la casa y acá está entrando”, la orientación de los objetos no fue en general tenida en cuenta en casi ninguna de las realizaciones.

La recepción del mensaje

Con frecuencia, el equipo receptor interpreta mayor información que la emitida. Por ejemplo, dos grupos reciben la instrucción "poner el banco en el medio de la hoja" sin indicación de la dirección del banco (que es de forma rectangular) y, sin embargo, lo colocan paralelo al borde inferior de la hoja, en coincidencia con la orientación dada en la configuración del grupo A. Este comentario se relaciona con el uso de ciertos lugares o direcciones privilegiadas, en general paralelas a los bordes de la hoja (Laborde, 1988), tanto en la colocación de objetos como en la descripción y en la interpretación del equipo receptor.

Las subcolecciones de objetos

Como mencionamos en el análisis a priori, la consideración "mental" —no necesariamente explicitada— de subcolecciones que constituyen configuraciones locales de elementos permite que el dictado se organice por etapas.

En las construcciones de los equipos emisores se puede identificar con frecuencia una zona central de la hoja rodeada de otras: dos laterales (figura 2) o tres (figura 3).

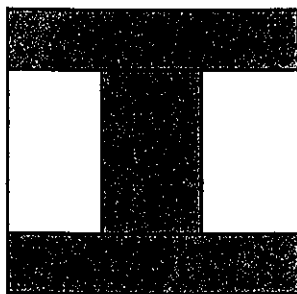


Figura 2

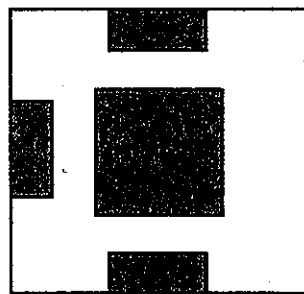


Figura 3

Esta distribución espacial permite referirse a un objeto central y a aquellos que se encuentran cercanos a él (pertenecientes a la zona central) y ubicar a los demás a partir de referencias como "del lado del pizarrón" o de las ventanas o relacionándolos con el objeto central ya colocado. La ubicación de los objetos en la parte central y en las zonas laterales parece corresponder al uso de lugares o direcciones privilegiadas ya citado anteriormente.

Esta organización del espacio para realizar la construcción y que facilita el dictado en etapas al considerar distintas subcolecciones, se contrapone con la actividad habitual en el Nivel Inicial, ya mencionada, de hacer dividir el espacio en cuatro zonas: arriba a la derecha y a la izquierda, abajo a la derecha y a la izquierda.

La confrontación

La secuencia pretende lograr un funcionamiento a-didáctico de los alumnos frente a la situación planteada, es decir, un funcionamiento independiente del docente en cuanto a que éste deja de ser el proveedor del conocimiento necesario para la resolución del problema y de la validación de la tarea realizada. La validación que plantea la secuencia está centrada en el momento de la comparación de las dos construcciones. Son las coincidencias que se planteen en ella lo que validará las formulaciones realizadas. En las primeras realizaciones, los alumnos no parecen detectar las diferencias de ubicación, rotación o lateralidad de los distintos elementos de la configuración y se conforman con configuraciones más o menos similares. Con gran facilidad afirman que se logró la misma escena a pesar de las incorrectas instrucciones recibidas.

Para los niños, que la disposición global de la configuración sea aproximadamente correcta es suficiente para aceptar que "salió igual". Más aún, si la posición relativa de algunos objetos entre ellos es aproximadamente correcta, es aceptado. Por ejemplo, en una construcción, los árboles fueron ubicados a los lados del banco, casi como en el modelo original, aunque no estaban ubicados en el mismo lugar de la hoja. En la confrontación los alumnos afirman, sin embargo, que están colocados correctamente.

También en los mecanismos de control llevados a cabo por los alumnos puede observarse una evolución a lo largo de las distintas realizaciones de

la actividad. Es en el interjuego entre formulaciones más precisas y controles más acertados que se favorece el aprendizaje por parte de los alumnos, ayudados por la reflexión que el docente organiza entre los distintos juegos y que propicia el análisis de las formulaciones realizadas y el intercambio entre los alumnos.

Así, vemos en las descripciones cómo se van precisando las expresiones, al abandonar algunas como "al lado de" muy comunes en el primer dictado, a favor de otras como "a la derecha" o "del lado del corral", así como en las preguntas que algunos alumnos del grupo receptor formulan en el momento de realizar la construcción. Por ejemplo, demandar la ubicación de un objeto que estaba siendo utilizado como referencia para otro y que no había sido aún localizado.

Conclusión

Esta actividad permite que niños incluso muy pequeños se involucren en una tarea problemática que pone en cuestión su capacidad y sus conocimientos para ubicar objetos; les permite enfrentarse a modelos de ubicación diferentes, formulados por sus compañeros, que contribuyen o no a ubicar con precisión los elementos y, además, permite analizar en la confrontación por qué no se logró lo que se esperaba: una granja idéntica a la original. La posibilidad de enfrentarse con rapidez al producto de su acción, aunque mediatizada por la comprensión del equipo receptor, favorece la evolución de las formulaciones, las que pueden observarse desde el primer dictado y la primera comparación. El análisis, la búsqueda de acuerdos y la ocasión de volver a realizar el juego permite una mayor evolución.

De todos modos, persisten ciertos aspectos sobre los cuales no creemos que sea posible, en líneas generales, lograr avances en niños tan pequeños (4 o 5 años), como los relativos a la orientación de los objetos, a la consideración de la ubicación de los emisores y los receptores y a los distintos modelos de ubicación espacial.

Esta secuencia de actividades puede organizarse también en segundo y tercer año de la EGB, dado que son varios los aspectos que presentan dificultades, aun para niños mayores, y el trabajo con una secuencia como ésta les permitiría seguir avanzando.

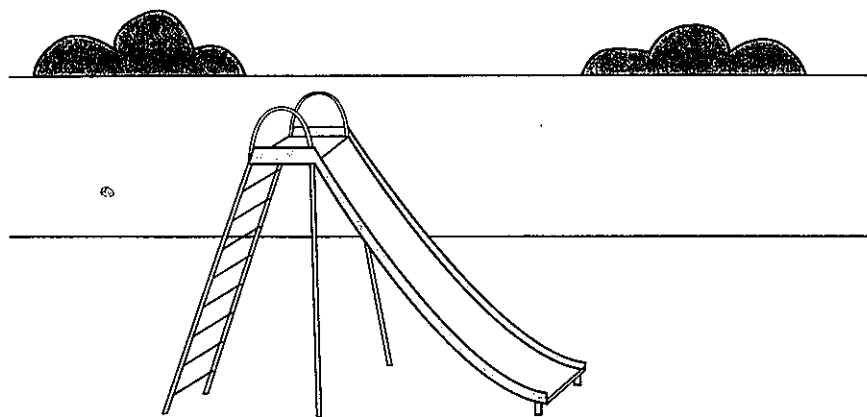
La aparición de distintos modelos de ubicación espacial nos llevó a indagar sobre la orientación de los objetos y su utilización para ubicar otros en el

espacio. La secuencia denominada "El tobogán", que se presenta más adelante, centra la discusión en la orientación de un objeto, el tobogán, y en el conflicto que provocan las referencias dadas en relación con el sujeto o con un objeto.

4. SOBRE LA ORIENTACIÓN DE LOS OBJETOS

En el análisis de la secuencia anterior decíamos que los niños, al realizar la descripción, pueden utilizar un mismo término espacial —como adelante, atrás, etcétera— con distintos significados: adelante en la hoja (refiriéndose al espacio más cercano al sujeto que realiza la descripción), adelante de las casas (con relación a la zona más alejada del sujeto, cuando las casas se encuentran en la línea visual del sujeto, entre el sujeto y el objeto que se quiere ubicar) o bien adelante de las casas (en función de las puertas de esas casas, sin referencia al sujeto que describe). Tal vez algunos hayan tenido la experiencia de llegar a su casa en taxi y hacer la siguiente indicación: "Déjeme *atrás* del auto rojo estacionado". ¿Dónde espera que se detenga el taxi? ¿Antes de llegar al auto rojo? ¿O después de haber circulado al lado del auto rojo y estacionado? En el primer caso, la referencia sería entendida en relación con el auto rojo estacionado y "atrás" significaría en la zona cercana a su "parte de atrás". En cambio, continuar, circular al lado del auto y estacionar más adelante significaría considerar la ubicación con respecto al chofer del taxi. "Atrás" sería la zona más alejada del chofer. Los distintos puntos de referencia considerados indican finalmente diferentes lugares para que el taxi deje a su pasajero.

La presencia de un tobogán en la actividad que se plantea a los alumnos y la posibilidad de utilizarlo como referencia para ubicar algo plantea cuestiones espaciales como las siguientes: ¿Es posible determinar inequívocamente la zona "a la izquierda" del tobogán? Una posibilidad es asignar la izquierda a la zona cercana a la escalera del tobogán, coincidiendo con la parte izquierda de la hoja, pero si se piensa en el movimiento que realiza un niño que se desliza por él, su propia lateralidad puede ser extendida al tobogán y a la zona que lo rodea y denominar izquierda del tobogán a la zona comprendida entre el tobogán y el muro.



¿Y cuál sería la zona reconocida como “adelante” del tobogán?

Si nos ubicamos en la posición de un observador de la imagen anterior, “adelante” del tobogán podría ser la zona que se sitúa en nuestro campo visual, entre nuestro cuerpo y el objeto, mientras que atrás podría ser aquella zona “tapada” por el objeto, interfiriendo en nuestra línea visual, es decir, la zona situada entre el tobogán y el muro.

Sin embargo, ningún niño duda cuando su madre le previene: “No te pares delante del tobogán, que te pueden lastimar”. Y ese “delante” no corresponde con el que acabamos de describir.

Es necesario tener en cuenta que la actividad que se presenta a los niños plantea un trabajo de ubicación espacial en una representación gráfica de un tobogán en un parque. Las consideraciones que se realicen deben tener en cuenta este hecho, dado que no sería lo mismo si la tarea se planteara en la realidad de un parque y su tobogán.

4.1. Algunas precisiones

Quisiéramos retomar brevemente aquí una discusión acerca de algunos términos relativos a la ubicación espacial, como “delante” y “adelante”, “detrás” y “atrás”. Para ello partimos de las definiciones de varios diccionarios.

Delante. 1. (adv.) Con prioridad de lugar, en la parte anterior o en sitio detrás del cual está una persona o cosa, o en la parte anterior o en un sitio donde da la cara de una persona o cosa.// 2. Enfrente.// 3. (adv.) A la vista, en presencia.

Adelante. Hacia la parte opuesta a otra.

Detrás. (adv.) En la parte posterior o con posterioridad de lugar o en sitio delante del cual está una persona o cosa.

Atrás. 1. (adv.) Hacia la parte que está o queda a las espaldas de uno.// 2. En la parte hacia donde se tiene vuelta la espalda, a las espaldas.// 3. Denota dirección hacia la parte posterior del que habla o de la persona o cosa nombrada.

A partir de estas definiciones se puede concluir que *atrás* localiza más vagamente, con menos precisión que *detrás*, si bien la diferencia a menudo es poco perceptible; por otra parte, “atrás” admite grados de comparación (más, menos, tan) y “detrás” no los admite. Por su parte, *adelante* indica movimiento y no debe confundirse con *delante*, que indica situación. Sin embargo estas distinciones no son tan precisas en el vocabulario cotidiano y menos aún en el de los niños. En la secuencia que se presenta no se previó realizar una discusión sobre estos aspectos.

Volviendo a las consideraciones anteriores sobre orientación de un objeto en el espacio, vemos que no está determinada en forma inequívoca, contrariamente a lo que sucede con la orientación en el propio cuerpo o en el de otro sujeto. Siguiendo a Liliane Lurçat (1976), podemos afirmar que, en relación con un objeto situado frente al observador existen dos maneras de orientar el espacio que lo rodea: (a) proyectando sobre el objeto el esquema corporal propio, o (b) teniendo en cuenta la orientación del objeto.

4.2. Proyección del esquema corporal

Lurçat señala tres maneras básicas de proyectar sobre un objeto el propio esquema corporal: por traslación, por rotación o por simetría.

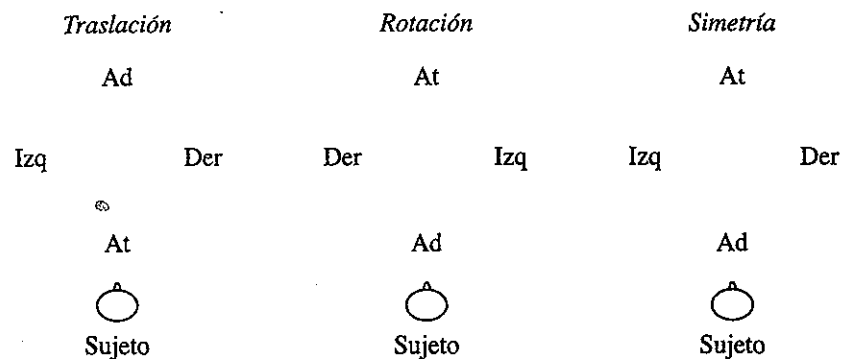


Figura 5

Según este modelo, orientar un objeto por *traslación*, significa asignar al objeto los referenciales propios del cuerpo del observador. Así, por ejemplo, si se trata de un árbol, colocado frente a un sujeto, corresponde asignar la derecha y la izquierda del mismo lado que los del sujeto observador, asignar adelante a la zona más alejada del sujeto y atrás a la zona más cercana al observador, es decir, la comprendida entre el sujeto y el árbol.

Por *rotación*: se asigna al objeto los referenciales del propio cuerpo después de realizar una rotación de 180°. La derecha e izquierda se invierten, adelante pasa a asignarse a la zona más cercana al observador y atrás a la zona más alejada.

Por *simetría*: se asigna al objeto los referenciales del esquema corporal a partir de una simetría con respecto a un plano vertical paralelo al frente del cuerpo del observador. Así, derecha e izquierda se encuentran del mismo lado que las del observador; en cambio, adelante se asigna a la zona más cercana al observador y atrás a la zona más alejada, es decir, cercana a la pared.

Además de estas tres formas básicas, Lurçat señala que pueden encontrarse formas mixtas que asignan los puntos de referencia para el eje adelante-atrás utilizando uno de los modelos y para el eje derecha-izquierda, otro.

4.3. Orientación del objeto

Como vimos en el modelo anterior, los objetos pueden ser orientados por

el sujeto, proyectando sobre él su propia lateralidad. Sin embargo, existen objetos que pueden considerarse como orientados o que pueden orientarse, dependiendo de su función o forma, independientemente de la lateralidad o posición del sujeto que designa los puntos de referencia. Así, una tetera puede ser orientada definiendo un adelante en relación con su pico y un atrás en relación con el asa. Esta orientación se realiza atendiendo a puntos de referencia propios del objeto (en este caso, el pico y el asa) que son utilizados para orientar el espacio que lo rodea. Un vehículo posee un adelante (que denominamos parte delantera) y un atrás (parte trasera), a la vez que posee una izquierda (la puerta o rueda izquierda) y una derecha (la puerta o rueda derecha) determinadas por su movimiento. Un escritorio o una cocina pueden adquirir una orientación específica de acuerdo con su uso, así adquieren significado expresiones como: delante de la cocina o atrás del escritorio.

No sucede lo mismo con las referencias a la derecha o a la izquierda, más relacionadas con el sujeto que las designa que con el objeto en sí mismo. Es importante mencionar que para determinar las polaridades del eje adelante-atrás, tanto de sujetos como de objetos, se utilizan en general referencias objetivas —la función, la forma, el movimiento—, mientras que para el eje derecha-izquierda las referencias son subjetivas. Así, adelante de la cocina corresponde a la cara en la que se encuentran las perillas, la puerta del horno, etcétera, y por proyección, el espacio cercano; la determinación de “adelante del auto” se relaciona con el sentido del movimiento. En cambio, para definir la derecha e izquierda de un objeto, se utiliza con frecuencia la lateralidad del propio cuerpo. Por ejemplo, “a la derecha de un negocio” no es una expresión precisa, salvo que utilicemos la propia lateralidad y en ese caso es necesario agregar la posición del sujeto, “saliendo, a la derecha”, dado que no se trataría del mismo lado, si el sujeto está entrando al negocio que si está saliendo.

La derecha e izquierda de los objetos podrían ser definidas en forma similar a la lateralidad del cuerpo humano: la parte derecha de nuestro cuerpo es la ubicada entre la parte delantera y la trasera, girando en el sentido de las agujas del reloj. De esta manera, una vez identificadas las referencias adelante y atrás de un objeto, podría determinarse la derecha y la izquierda de acuerdo con este modelo.

Un tobogán en una plaza, como el que consideraremos en la secuencia siguiente, puede ser orientado atendiendo a estos dos modelos que acaba-

mos de caracterizar: considerándolo como un objeto orientado o proyectando la lateralidad del sujeto que define sus polaridades.

Con respecto a la derecha e izquierda, si se define "adelante" en relación con el lugar de llegada de los niños al deslizarse por él y "atrás" en relación con la escalera, puede definirse la "derecha" del tobogán de acuerdo con el modelo anterior, que coincide, por otra parte, con la región ubicada a la derecha de un niño que se desliza por el tobogán.

Ocuparse en la escolaridad obligatoria de los objetivos relativos a la ubicación espacial, implicaría hacerse cargo de estas dificultades. El vocabulario correspondiente a las posiciones relativas y a los desplazamientos en el espacio aplicado a situaciones familiares es comprendido precozmente, y éste es uno de los motivos que puede enmascarar la diversidad de modelos desde los cuales los niños se orientan a sí mismos y a los objetos en el espacio.

La secuencia siguiente apunta a hacer jugar al vocabulario espacial su rol informativo, confrontando a los niños con situaciones que los obligue a precisar las relaciones espaciales en juego e, incluso, a explicitar los referentes utilizados en la comunicación.

5. SECUENCIA DIDÁCTICA: "EL TOBOGÁN"¹⁰

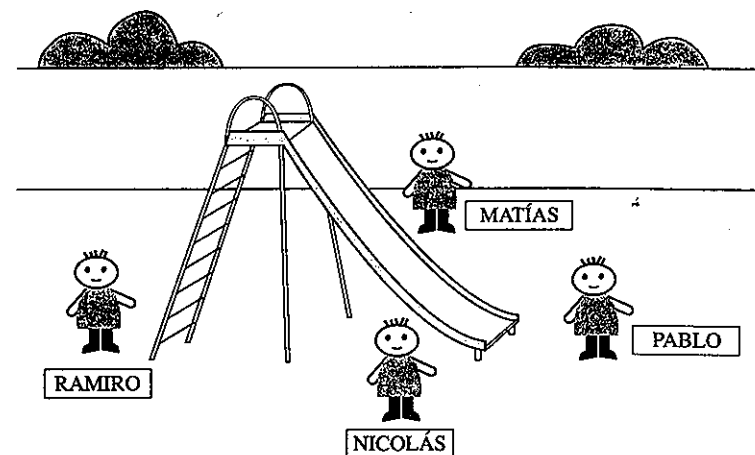
5.1. Ficha didáctica

Destinada a alumnos de 3º año de la EGB

Materiales

La mitad de los grupos de la clase recibe el siguiente dibujo.
La otra mitad recibe un dibujo similar, pero que no incluye el nombre de los niños.

10. Esta secuencia fue publicada con el nombre de Tobogán 2, en el artículo "La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad", *Educación Matemática*, vol. 10, n° 2, agosto de 1998, Grupo Editorial Iberoamérica.



Objetivos

- Determinar relaciones espaciales entre objetos o personas en el entorno próximo utilizando puntos de referencia.
- Elaborar un lenguaje apropiado para comunicarlas sin ambigüedades. Para ello se apunta a:
 - descubrir la necesidad de explicitar los puntos de referencia utilizados;
 - explicitar la posición del observador y/o el modelo de orientación seleccionado.

La finalidad de estas actividades es que los alumnos logren determinar la información necesaria para identificar a los niños presentes en la representación gráfica de una plaza. La escena fue organizada de manera tal que la ubicación espacial de los niños respecto de los demás o de los objetos presentes en la situación sea una información pertinente para la tarea a realizar.

Descripción de la actividad

Organización de la clase

Los alumnos trabajan organizados en un número par de grupos formados por dos o tres alumnos cada uno.

Consigna

Los alumnos pertenecientes al primer grupo, a quienes llamaremos emisores, recibieron el dibujo de una plaza, donde hay cuatro niños y cada uno de ellos tiene un cartelito con su nombre.

Los alumnos pertenecientes al segundo grupo, a quienes llamaremos receptores, tienen el mismo dibujo, pero en los cartelitos no están escritos los nombres de los niños.

Los emisores deben lograr que sus compañeros pertenecientes a los grupos receptores coloquen en el cartelito de cada niño su nombre respectivo. Para ello deben enviar la información que consideren necesaria para lograrlo. Estos mensajes deben ser escritos y no incluir dibujos ni croquis.

Si a los equipos receptores se les presenta alguna dificultad, pueden plantear preguntas por escrito a su equipo emisor, quien las contestará también por escrito.

Una vez concluida la tarea, los dos equipos compararán sus dibujos y analizarán los errores y las dificultades encontradas si las hubo.

Desarrollo

• PRIMERA PARTE

– Elaboración del mensaje.

Los equipos que recibieron el dibujo discuten sobre qué información enviar para posibilitar que el equipo receptor coloque el nombre de cada uno de los niños presentes en el dibujo y elaboran un mensaje. Este mensaje es llevado por el docente al grupo receptor correspondiente.

– Asignación de los nombres.

Los equipos receptores, a partir del mensaje recibido, colocan el nombre de cada uno de los niños en su propio dibujo. Si consideran que la información recibida es incompleta o confusa, pueden plantear preguntas al equipo emisor por escrito y el docente será el encargado de establecer la correspondencia entre los dos equipos.

– Confrontación de los nombres.

Los dos equipos correspondientes confrontan el nombre asignado a cada niño con su nombre correcto, presente en la imagen recibida por el equipo emisor. El docente guía la discusión, si es necesario, haciendo preguntas como las siguientes: "¿Por qué no pudieron poner el nombre correcto?", "¿Qué o cómo tendrían que haberles dicho para que pudieran cumplir su tarea?", "¿Sirve decir... (retomando alguna expresión utilizada por los alumnos)?".

• SEGUNDA PARTE

– Inversión de los roles de los equipos

Se invierte el rol de emisores y receptores, a partir de un dibujo similar con niñas (en lugar de niños) ubicadas en las mismas posiciones. Se organiza la actividad de la misma manera que la anterior.

• TERCERA PARTE

– Análisis de los mensajes producidos.

El docente organiza una discusión colectiva sobre las dificultades encontradas en el desarrollo de la actividad. Retoma las preguntas realizadas en las confrontaciones anteriores y presenta a discusión las principales cuestiones que impidieron la determinación de los nombres. Se trata aquí de hacer partícipes a todos los alumnos de las discusiones que se suscitaron en uno u otro equipo, identificar las dificultades y acordar algunos puntos que pueden facilitar la tarea.

El docente plantea a toda la clase el análisis de algunos de los mensajes producidos por los equipos a fin de determinar si permiten o no la asignación del nombre de cada niño. Los análisis de los alumnos y sus formulaciones son retomados por el docente y formulados claramente, si es necesario, asignándoles un estatus de conocimientos disponibles para la siguiente realización de la actividad. Esta discusión debería poner en evidencia la necesidad de plantear acuerdos previos para lograr la comunicación.

- Elaboración de un mensaje para un receptor ajeno al grupo.

Cada par de alumnos elabora un mensaje a partir de lo discutido en la fase anterior que permita comunicar de la mejor manera posible las informaciones necesarias para que un alumno ajeno a este grupo escolar pueda designar a cada niño de la situación presentada con su nombre correspondiente. Estos mensajes son analizados y discutidos en la clase y se elabora, en forma colectiva, un único mensaje que será entregado a un alumno ajeno al grupo, teniendo en cuenta las conclusiones de ese análisis.

5.2. Análisis a priori de la secuencia

Decisiones tomadas

Para organizar la escena se tomaron algunas decisiones. Por un lado, se eliminaron todas las características de los niños que pudieran servir para identificarlos más allá de su ubicación con respecto al tobogán o a otros objetos. Por otra parte, se incluyeron únicamente cuatro niños para centrar la discusión en las polaridades básicas: adelante-atrás, derecha-izquierda.

En el dibujo entregado se incluyó un muro de fondo que puede ser utilizado, junto con la escalera del tobogán, como referente objetivo. De esta manera las discusiones pueden centrarse en las posiciones de los dos niños ubicados a la derecha y abajo, respecto de la hoja, dado que se trata de las dos ubicaciones no identificables fácilmente a partir de tales objetos.

La clase se organiza en pequeños grupos para favorecer la aparición de las distintas concepciones de los alumnos acerca de la orientación y a la vez facilitar los intercambios entre ellos de más difícil aparición en grandes grupos. El número par de grupos permite que a cada grupo emisor le corresponda un grupo receptor con quien intercambiará los mensajes.

Si el grupo en el que se desarrolla la actividad no está habituado a este tipo de trabajo, será necesario dedicar un cierto tiempo a la apropiación de la consigna por parte de los alumnos. Es frecuente que los alumnos la interpreten como una adivinanza donde se incluyen algunas “pistas” y donde, a la vez, se trata de dificultar el trabajo del receptor, lo que no es el caso.

Descripción de la tarea para los alumnos

Para que el mensaje elaborado por el equipo emisor permita al grupo receptor escribir en los carteles el nombre correcto de cada uno de los niños, es necesario incluir en él la información necesaria para identificarlos. Dado que las características que podrían distinguir a los niños entre sí —como sexo, vestimenta, altura, color del pelo o forma del peinado— han sido eliminadas, su ubicación espacial respecto de alguno de los objetos o personas presentes en el dibujo —el tobogán, los otros niños, el muro, los árboles— o incluso respecto de la hoja, soporte del dibujo, permite distinguirlos y a la vez identificarlos.

Veamos cuáles son algunas posibilidades de ubicación de los niños: por ejemplo, identificar primero al que está “delante del tobogán”. ¿Es posible definir inequívocamente “delante del tobogán”? Podría decirse que Nicolás está delante del tobogán, ya que con frecuencia denominamos así a la zona que se sitúa en nuestro campo visual, entre nuestro propio cuerpo y el tobogán, mientras que atrás es aquella zona que deja al tobogán entre el objeto y nosotros mismos, es decir, la situada entre el tobogán y el muro.

Sin embargo, como dijimos, ningún niño duda cuando su madre le previene: “No te pares delante del tobogán porque te pueden lastimar”. Y ese “delante” no corresponde con el que acabamos de describir.

Podemos reencontrar así las distintas maneras de orientar un objeto, considerándolo como orientado o trasladando sobre el objeto la lateralidad del sujeto que mencionamos en el apartado 4.

El recurso a las polaridades de la hoja —arriba, abajo, derecha, izquierda— es otra de las posibilidades y permite identificar las posiciones de los cuatro niños. Así, Matías podría quedar definido como el que está en la parte de arriba de la hoja, Nicolás en la parte de abajo, Pablo a la derecha de la hoja y Ramiro a la izquierda. Es claro que con estas referencias no existe ambigüedad posible en la asignación de los nombres. Pero esta determinación de las polaridades de la hoja también se trata de una orientación por traslación para el caso de la derecha e izquierda de la hoja y de una asignación especial para arriba y abajo, ya que se está considerando a la hoja como si estuviera colocada en forma vertical.

Si no se recurre a la hoja como referente, pueden utilizarse el muro y la escalera como referentes objetivos, es decir, independientes de la ubicación del sujeto que elabora el mensaje. Estas referencias permiten ubicar a Ramiro y a Matías, pero no a Pablo y a Nicolás. Incluso para Matías no es suficiente indicar que se encuentra delante del muro, ya que los cuatro niños se encuentran delante del muro.

Las demás formas de identificarlo dependen de la ubicación del sujeto que las utiliza (ubicación real o simulada: "poniéndome en la escalera, a la derecha...") y no siempre pueden ser comprendidas por un receptor si no son explicitadas previamente.

En todos los casos es necesario determinar puntos de referencia, ya sea el tobogán o algunas de sus partes, o bien otros objetos ajenos al tobogán, puntos de referencia relativos al sujeto que observa, o incluso la hoja en sí, soporte del dibujo.

Análisis de la situación planteada

La situación "El tobogán" está construida a partir de una situación de comunicación en la que un grupo emisor que posee una información (el nombre de los niños) debe comunicarla al equipo receptor que no la posee. La información enviada debería permitirle colocar el nombre correspondiente a cada uno de los niños.

Para los emisores, se trata de caracterizar a cada uno de los niños a fin de permitir su identificación. Para ello deben determinar la información necesaria, seleccionarla y comunicarla (elaborar un lenguaje apropiado) por medio de un mensaje. La posibilidad de establecer relaciones espaciales de los niños entre ellos o con los objetos presentes aparece como una característica pertinente de la situación.

Para los equipos receptores se trata de una tarea de decodificación. El problema para ellos es lograr decodificar la información transmitida y transformarla en acciones para determinar el nombre de cada uno de los niños.

Esta organización de la actividad obliga a los alumnos a determinar primero que la ubicación espacial de los niños puede constituir un recurso pertinente para resolver la tarea propuesta, posteriormente determinar las relaciones espaciales en juego y elaborar un vocabulario adecuado para facilitar la recepción de sus compañeros.

Por otra parte, "El tobogán" hace jugar al conocimiento involucrado un rol bastante cercano al que juega en las situaciones habituales de ubicación espacial, ya que la funcionalidad específica del vocabulario espacial es comunicar información a alguien que no la posee. Esto permite a los alumnos atribuir una significación próxima a la de las prácticas de referencia de los conocimientos elaborados en esa situación.

En un segundo momento de la secuencia, los alumnos se enfrentan a una situación de validación tanto en relación con el vocabulario utilizado como con la pertinencia de la información explicitada. Una primera fase de la validación del mensaje está dada por la denominación, correcta o no, del nombre de cada uno de los niños por parte del grupo receptor que queda evidenciado en la comparación de los dos dibujos. Una segunda fase de validación ocurre durante la discusión y los acuerdos que logran los alumnos al analizar las dificultades presentadas para elaborar y comprender el mensaje. Es después del segundo intercambio de mensajes cuando los alumnos tienen la oportunidad de analizar la validez de sus mensajes en una discusión colectiva monitoreada por el docente.

A lo largo de la secuencia, en particular en la primera y segunda parte, se busca un funcionamiento a-didáctico de los alumnos frente a la situación planteada, es decir, un funcionamiento independiente del docente en cuanto a que éste deja de ser el proveedor del conocimiento necesario para la resolución del problema.

Es necesario aclarar aquí que en relación con la validación pueden aparecer distintas situaciones que es necesario considerar. Si los dos grupos (emisores y receptores) utilizan modelos de orientación diferentes, el mensaje puede ser correcto en cuanto a la información enviada y al vocabulario utilizado y, sin embargo, los receptores pueden no poder cumplir con su objetivo de identificar a los niños para colocar sus nombres debido, justamente, a la utilización de un modelo diferente para interpretar el mensaje.

Otra posibilidad es que ambos grupos compartan un mismo modelo de orientación y esto provoque —sin necesidad de explicitación alguna— una correcta ubicación de los niños.

5.3. Organización de la secuencia en las clases

La secuencia "El tobogán" fue desarrollada en dos grupos¹¹ de tercer año pertenecientes a dos escuelas diferentes.¹² La duración total del desarrollo de la secuencia fue de tres módulos de una hora cada uno. Las clases, las intervenciones y las discusiones entre los alumnos y con el docente fueron registradas¹³ en su totalidad. Fueron recogidos y analizados los 26 mensajes elaborados en las diferentes instancias de la secuencia en ambas clases en forma grupal, colectiva o por parejas de alumnos.

Las condiciones de desarrollo de la secuencia fueron diferentes en ambas escuelas. En una de ellas, el escaso trabajo grupal previo y de situaciones de comunicación provocó una mayor dificultad para comprender la consigna y apropiarse del problema. Esto marcó una diferencia con la otra clase, donde el estilo de trabajo cotidiano, de abundante trabajo grupal y colectivo y de actividades específicas de análisis y de discusión, permitió una comprensión inmediata de la consigna.

Una vez superado este paso, los alumnos de ambos grupos utilizaron la ubicación espacial de los niños en sus mensajes, pero no siempre fue posible para el equipo receptor colocar correctamente los nombres, debido al uso de modelos de orientación diferentes, tal como habíamos previsto. Algunos grupos plantearon una orientación cuyo punto de referencia fue el tobogán, determinando un adelante (lugar donde se llega después de deslizarse) y un atrás (cerca de la escalera), pero variando la asignación de la derecha y la izquierda. Algunos se imaginan o hacen el gesto correspondiente, ubicados en la escalera para definir la derecha e izquierda; otros, desde el lugar de llegada, las definen en el sentido contrario, lo que muestra que tanto el objeto en sí, el tobogán, como el movimiento que se realiza

11. Agradecemos a la docente Miriam Flores su buena disposición para que sus clases fueran observadas y por estar siempre dispuesta a probar, analizar o modificar propuestas.

12. Los grupos escolares pertenecen a la Escuela N° 291 y al Saint Patrick College de Corrientes.

13. Agradecemos a las integrantes del Equipo de Matemática de la Asesoría Técnico-Pedagógica del Ministerio de Educación de la Provincia de Corrientes, C. Camerano y C. Barrionuevo, su participación en estas observaciones, registros y desgrabaciones y su disposición para los numerosos intercambios realizados acerca del tema que nos ocupa.

en él determinan más claramente el adelante y atrás que la derecha e izquierda, ya que en ambos casos hacen corresponder el mismo adelante y atrás.

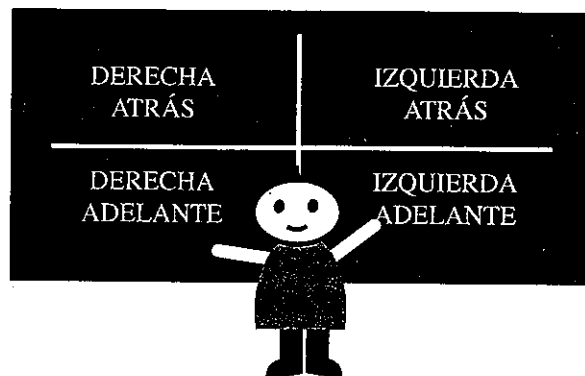
Esta constatación coincide con los resultados de investigaciones como la de Lurçat (1976), quien menciona que la designación adelante-atrás estaría determinada preferentemente por el objeto, mientras que el par derecha-izquierda quedaría determinado por el sujeto, y concluye: "La orientación del medio ambiente por el par adelante-atrás domina la orientación subjetiva que caracteriza las referencias derecha-izquierda. Para adelante y atrás, el niño se desprende de su propia subjetividad mientras que queda preso de ella para la izquierda y la derecha".¹⁴

En cuanto a la proyección del esquema corporal propio sobre el tobogán, no encontramos en ningún caso alumnos que la realicen por traslación de su esquema pero sí por rotación o simetría. Uno de los niños, José, pasó al pizarrón para indicar a sus compañeros (y a los observadores) cómo determinó la derecha e izquierda por rotación, para la elaboración de su primer mensaje. Colocado de espaldas al pizarrón, sobre un dibujo del tobogán y enfrentado a la clase, definió con su cuerpo un eje casi vertical que divide al pizarrón en dos zonas: la derecha y la izquierda, quedando así dos niños en cada una de las zonas: Matías y Ramiro en la zona derecha y Pablo y Nicolás en la izquierda.



14. La investigación a la cual se refiere esta conclusión fue realizada con niños de 4 a 7 años.

En la elaboración del siguiente mensaje perfeccionó esta asignación y determinó además un eje horizontal, respecto del cual quedaron Ramiro a la derecha adelante, Matías a la derecha atrás, Pablo a la izquierda atrás y Nicolás a la izquierda adelante.



Este tipo de orientación fue presentado por José en cada una de sus intervenciones a lo largo de los tres módulos, pero no fue comprendida por sus compañeros, a pesar de sus reiteradas explicaciones. En el último módulo, cuando se analizaban distintas propuestas, declaró que aceptaba las de los demás porque permitían comprender la ubicación de los niños más claramente que la suya.

Otro de los alumnos, Antonio, propuso utilizar únicamente la derecha e izquierda para ubicar a los cuatro niños. Primero, proyectadas por traslación desde su esquema corporal sobre el tobogán. Así, Pablo está a la derecha y Ramiro está a la izquierda del tobogán. Posteriormente realizó una proyección similar usando nuevamente la derecha e izquierda, según un eje perpendicular al anterior, cambiando su posición desde "frente al tobogán" (es decir, frente a la hoja) a "sobre la escalera". Así, Nicolás está a la derecha y Matías está a la izquierda. A lo largo de los tres módulos pudimos observarlo cuando gesticulaba con sus manos palmas para arriba, ubicándose primero frente al tobogán y luego desde la escalera. Comprendía claramente la dificultad de su sistema de referencias, pero esa misma dificultad le impedía elaborar un lenguaje que le permitiera comunicarlo.

Podemos señalar que las asignaciones más frecuentes son las producidas por simetría en la proyección del propio esquema corporal y las determinadas por el tobogán mismo, considerando como adelante el lugar al cual se llega luego de deslizarse por él. En los mensajes por parejas elaborados en la tercera parte, un 75% de los niños situó a Pablo *delante del tobogán*. Algunos alumnos precisan aún más esta formulación, buscando otros referentes objetivos que eliminen la ambigüedad en el mensaje, como "delante de las patas de la bajada del tobogán" o "enfrente de la punta de la bajada del tobogán".

En algunos grupos se produjeron formulaciones que superaban la aparente (no necesariamente explicitada) contradicción entre dos modelos diferentes. En uno de ellos, al finalizar la clase, uno de los observadores interroga a dos alumnas sobre el mensaje elaborado por ambas:

Obs.: *Y a vos, Sara, ¿cuál te parecía que está adelante del tobogán?*

Sara: *Éste* (señala a Nicolás).

Obs.: *¿Y el que está atrás?*

Sara: *Éste* (señala a Matías).

Obs.: *¿Y a vos?*

Julieta: *Éste* (señala a Pablo).

Obs.: *¿Y atrás?*

Julieta: *Éste* (señala a Ramiro).

Obs.: *Así que para Sara el que está detrás del tobogán es Matías y para Julieta el que está detrás es Ramiro...*

Las dos: *Sí.*

Obs.: *¿Y qué hicieron?*

(Se ríen.)

Obs.: *¿Y cómo mandaron el mensaje?*

Sara: (Riendo.) *El que está adelante del muro es Matías.*

Nos interesa rescatar que los alumnos toman conciencia de la dificultad para caracterizar la posición de los niños en el dibujo, en particular en la asignación de los puntos de referencia del eje derecha-izquierda.

Estas referencias, y en particular la discusión con respecto a qué o a quién se dieron, no fueron utilizadas de la misma manera por todos los alumnos. Para algunos se convirtió en una discusión muy importante; otros, conscientes de la dificultad que podría provocar en los receptores, evitaron su utilización en la mayor parte de las veces.

La utilización de otros puntos de referencia objetivos, externos al tobogán, como la pared, o formando parte de él como la escalera (cuando utilizan "al lado de" y no a la izquierda o derecha de ella), les permitió empezar a cuestionar los sistemas empleados previamente y a buscar referenciales que eliminen la ambigüedad de la información enviada. La referencia "Ramiro está al lado (o detrás) de la escalera", al constituirse en una formulación objetiva e incuestionada, permitió en muchos grupos dudar de las denominaciones realizadas anteriormente.

Estas referencias aparecen en todos los mensajes elaborados en la última parte de la secuencia, sin que esto haya sido discutido y acordado explícitamente.

El tipo de organización de la secuencia, con elaboración de mensajes en pequeños grupos, discusiones entre los grupos correspondientes y análisis colectivo de las dificultades, permite que las formulaciones más claras se empiecen a difundir entre los alumnos y sean aceptadas aún si no han sido explícitamente mencionadas como más económicas y no se hayan realizado los acuerdos necesarios. Por ejemplo, uno de los grupos utiliza la expresión "cerca de" para ubicar a los niños en la plaza con referencia a la escalera, al muro o a los otros niños presentes en la situación. Si bien no existe ambigüedad en la comunicación cuando se ubica a uno de ellos "cerca de" la escalera o del muro, ubicarlos en función de la posición de los ya mencionados exige un cuidadoso orden en las formulaciones y en el dictado. En ningún caso se puede mencionar alguno de los niños no ubicado previamente. El grupo receptor de un mensaje de este tipo, cuando elabora el suyo, adopta también la expresión "cerca de" para ubicar a los niños de la situación, pero presta mucha atención al orden en que enuncia las posiciones. Ambos grupos abandonan tal expresión una vez que conocen y se comentan otras relaciones espaciales más claras y precisas, establecidas por sus compañeros de clase.

Dado que algunas de las formas de orientar un objeto se relacionan con el propio cuerpo, la posición de los alumnos en la clase frente a la hoja con el dibujo es una variable importante; si bien se decidió ubicarlos de un solo lado de la mesa, esta variable no pudo ser controlada totalmente, ya que los alumnos asumen posiciones diferentes durante la actividad, colocándose a veces sobre los bordes laterales de la mesa. Las referencias "a la derecha

de" o "delante de" pasan así a ser diferentes según sea la posición del niño que las formula. Incluso, la posición elegida para determinar la derecha y la izquierda del tobogán se vio en ocasiones influenciada por la posición de los niños en la mesa. Así, en una de las parejas, Micaela, sentada a la izquierda, simula colocarse en la escalera; en cambio, Juan Pedro, sentado a la derecha, se ubica en la bajada del tobogán para designar la derecha e izquierda del tobogán.

Algunas de estas diferencias fueron eliminadas durante la elaboración del mensaje, otras perduraron en las discusiones posteriores.

5.4. Conclusiones

Al final de los tres módulos podemos afirmar que la actividad provoca en todos los alumnos la elaboración de relaciones espaciales y la necesidad de precisar las referencias que pueden ser utilizadas. Los alumnos evolucionan en las formulaciones a partir de la necesidad de precisión aportada por la comprensión o no por parte de los receptores del mensaje enviado, por el análisis y la discusión entre los alumnos y con el docente y por la búsqueda de formulaciones que permitan eliminar la ambigüedad en la comunicación.

Sin embargo, la determinación de acuerdos previos entre los grupos y la explicitación de los modelos de orientación diferentes no fueron organizadas por el docente¹⁵ y quedó, en general, a cargo de los alumnos tomar conciencia de las dificultades y elaborar formas de comunicación diferentes que les permitieran superarlas. Con frecuencia, los alumnos evitan las contradicciones o ambigüedades que aparecen en las parejas o grupos, realizando una sobreinterpretación de la información presente ("deben querer decir...") o determinando nombres o lugares en función de otros motivos ajenos a lo que plantea el mensaje. Por ejemplo, a lo largo de la secuencia, casi todos los grupos receptores ubicaron correctamente el último niño del mensaje debido justamente a que era el último que quedaba por identificar,

15. El diseño de la secuencia no explicitaba claramente cuáles podrían ser los recursos del docente para realizarlo.

sin volver sobre la comprensión o coherencia de la información enviada para ubicarlo. Si las dificultades, contradicciones o ambigüedades que aparecen en los equipos no son retomadas por el docente y sometidas a discusión, el acuerdo entre los componentes del equipo es suficiente en algunos casos para abandonarlas y avanzar.

Esto nos permitió determinar la necesidad de una reformulación de la secuencia en el sentido de precisar las intervenciones del docente; estas intervenciones deberían permitir la discusión y la determinación de acuerdos parciales que jalonaran el desarrollo de la secuencia, pasando a convertirse en conocimientos acordados por todos, y que favorecieran el avance en el aprendizaje. Por ejemplo, la utilización de la escalera como referencia objetiva para ubicar a Ramiro, si es planteada por los alumnos, debería ser discutida y acordada tempranamente; de la misma manera que los modelos diferentes de orientación del tobogán que aparecen y que pueden ser explicitados después de los primeros intercambios de mensajes. Es necesario organizar actividades específicas relativas al establecimiento de acuerdos entre los equipos correspondientes, actividades de elaboración de nuevos mensajes donde se pongan a prueba los acuerdos establecidos y de análisis posteriores para su reformulación.

La última parte de la secuencia, redactar un mensaje para una persona ajena al grupo escolar, exige encontrar formulaciones que expliciten las referencias utilizadas en el mensaje, dado que no se pueden acordar previamente, como podía ser el caso en el intercambio de mensajes entre los alumnos de una misma clase.

En conclusión, las dificultades en la elaboración y utilización de relaciones espaciales, en la explicitación de modelos de orientación y en la necesidad de proveer mayor información relativa, por ejemplo, a la posición del observador, siguen presentes en alumnos de tercer año de la EGB. La situación "El tobogán" permite plantearlo claramente y lograr que los alumnos no sólo elaboren relaciones espaciales sino que cuestionen su validez para comunicar informaciones y evolucionen en sus conceptualizaciones sobre un tema tan complejo, porque como dijo José con aire un poco desconsolado: "¡Hay tantas derechas!".

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1988): "Ingeniería Didáctica", en *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.
- Berthelot, R. y M. -H. Salin (1992): *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, tesis, Universidad de Bordeaux I.
- (1993): "La enseñanza de la geometría en la escuela primaria", *Grand N*, n° 53, Grenoble, IREM de Grenoble. (Traducido para el PTFD por Capdevielle, Varela y Willson en 1994.)
- Bourdieu, P. (1980): *Le sens pratique*, París, Éditions de Minuit.
- Brousseau, G. (1986): *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*, serie B: trabajos de matemática, Córdoba, IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- (1998): *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Colinvaux, D. y C. Dibar Ure (1988): "Trabajando con adultos no alfabetizados. La construcción de la noción de espacio", en *Psicología genética*, Buenos Aires, Miño y Dávila.
- Laborde, C. (1988): "L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n° 3, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- (1995): "Occorre apprendere a leggere i scrivere in matematica?", *II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica*, Sulmona, abril de 1995.
- Lurçat, L. (1976): *L'enfant et l'espace. Le rôle du corps*, París, PUF.
- (1982): *Espace vécu et espace connu a l'École Maternelle*, París, ESF.
- Pêcheux, M. -G. (1990): *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, París, Nathan.
- Piaget, J. y B. Inhelder (1973): *La représentation de l'espace chez l'enfant*, París, PUF.
- Piaget, J.; B. Inhelder y A. Szeminska (1973): *La géométrie spontanée de l'enfant*, París, PUF.

GEOMETRÍA EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA E.G.B: PROBLEMAS DE SU ENSEÑANZA, PROBLEMAS PARA SU ENSEÑANZA

Claudia Broitman
Horacio Itzcovich

En este capítulo, en el marco de la didáctica de la matemática, se rele-
van un conjunto de problemáticas estudiadas por diversos autores en torno
a la enseñanza de la geometría. Por un lado, se presentan algunas caracte-
rísticas de los orígenes del conocimiento geométrico y de su posterior evo-
lución histórica como disciplina. Esta mirada permite revisar cómo “vive”
la geometría en la escuela. En particular, se analizan críticamente las su-
puestas vinculaciones entre la geometría y la vida cotidiana y la necesidad
del trabajo empírico para la construcción de conocimientos geométricos.
Por otro lado, se realiza una distinción entre varios tipos de problemas se-
gún los conocimientos involucrados y el proceso de adquisición. Las ca-
racterísticas de unos y otros tipos de problemas permiten discutir la
necesidad y posibilidad de intervenir pedagógicamente para cada uno de
ellos.

Se plantea la cuestión de la finalidad de la enseñanza de la geometría en
la EGB, arriesgando como respuesta la importancia de la adquisición de
conocimientos y de prácticas geométricas como apropiación de parte de
una cultura. Un problema específico es la factibilidad de la geometría de
ser enseñada en el primer ciclo sin que se desnaturalicen los objetos
geométricos.

Por último, se presentan tres secuencias didácticas para el primer ciclo que permiten una introducción al estudio de figuras y cuerpos geométricos. El análisis didáctico de los problemas geométricos involucrados en estas secuencias pone el énfasis en el tipo de gestión de la clase. Las intervenciones didácticas y la organización del trabajo apuntan a promover la aparición, la difusión y la evolución de los conocimientos geométricos para este nivel de enseñanza.

1. INTRODUCCIÓN

Comenzaremos por plantear algunas líneas generales acerca de qué entendemos por geometría y por hacer geometría en la escuela. Mencionaremos algunos debates acerca de la finalidad de su enseñanza retomando y analizando críticamente ciertas ideas que han circulado en los últimos años en la literatura didáctica y que tienen fuerte incidencia en las prácticas docentes actuales. Plantearemos asimismo algunos problemas didácticos de la enseñanza de la geometría en general y del primer ciclo en particular. Por último, presentaremos un análisis didáctico de algunos problemas geométricos para los primeros años de la EGB.

Es importante destacar el área de vacancia que existe actualmente en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. A diferencia de lo que ocurre con la enseñanza del campo numérico, contamos sólo con algunos estudios acerca de los procesos constructivos por parte de los niños sobre objetos geométricos y con muy pocos trabajos de investigación acerca de la enseñanza de la geometría. A pesar de señalar la insuficiencia de estudios psicológicos y didácticos, es posible hoy brindar algunas orientaciones sobre la enseñanza de la geometría, tomando los aportes de diferentes trabajos.

Por una parte consideraremos las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática francesa, en particular el estudio y análisis de los procesos y fenómenos de la enseñanza usual abordados por Brousseau (1980-1981) y el desarrollo de la teoría de situaciones (1986), que permite considerar algunas de las características más trascendentes que deberían tener los procesos de enseñanza. Dicha teoría nos ofrece un marco dentro del cual elaborar criterios de selección, diseño y análisis didáctico de problemas que permitan generar procesos constructivos por parte de los alum-

nos a partir de un cierto tipo de gestión en la clase. Sobre la enseñanza de la geometría, más particularmente, contamos con los estudios de Berthelot y Salin (1993), Laborde (1990), Balacheff (1987), Fregona (1995a) y Gálvez (1994), en quienes nos inspiramos para plantear la diversidad y complejidad de los problemas didácticos. También nos sirve de marco referencial nuestra propia experiencia de trabajo con alumnos del primer ciclo, con docentes en cursos de capacitación o instancias de actualización en didáctica de la matemática y en el trabajo en asesoramiento técnico didáctico y desarrollo curricular llevado a cabo en los últimos años (Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman, 1998; Broitman e Itzcovich, 2001).

Como concepción de aprendizaje adoptamos las tesis piagetianas que explican el pasaje de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento. Desde esta perspectiva, se considera la necesidad de que los alumnos se enfrenten a situaciones problemáticas nuevas, frente a las cuales pongan en juego sus "viejos" conocimientos; y si ellos no les son suficientes para alcanzar una solución eficaz, puedan construir una nueva respuesta en un proceso interactivo de equilibrios y desequilibrios. Se trata de un complejo proceso de reorganización de sus conocimientos en dirección a los saberes propios de la disciplina. A partir de estas ideas resulta necesario aceptar y prever el carácter provisorio y el largo plazo en los procesos de construcción de conceptos matemáticos en la escuela por parte de los alumnos.

2. DESDE LA GEOMETRÍA QUE ESTUDIA EL ESPACIO REAL HACIA LA GEOMETRÍA QUE CREA UN ESPACIO MATEMATIZADO

Es bastante habitual, con respecto a la enseñanza de la geometría, leer o escuchar ciertas reflexiones acerca de las fuertes y en apariencia tan evidentes relaciones entre la geometría y la realidad. Algunas de estas ideas que circulan y que encabezan propuestas didácticas bibliográficas son "la geometría está en todos lados", "la geometría está en la realidad", "los niños aprenden geometría sin darse cuenta en interacción con el espacio real", etcétera. Hay aquí algunos supuestos interesantes para analizar. Por un lado, hay una "discusión" acerca del objeto de estudio de la geometría: ¿es la geometría una ciencia que estudia el espacio físico? En segundo lugar, subyace en las ideas anteriormente mencionadas una cierta concepción so-

bre el proceso de adquisición de saberes geométricos: ¿se aprende geometría a través de la interacción con el espacio físico?

Al pensar sobre la enseñanza de la geometría, resulta necesario realizar una distinción. Sabemos que el origen de muchos conocimientos geométricos se encuentra en problemas espaciales ligados a la medida de espacios físicos. Santaló (1961) afirma que toda la geometría —hasta *Elementos* de Euclides— era “una reunión de reglas empíricas para medir o dividir figuras”. Gálvez (1994) señala también que la geometría surgió como una ciencia empírica en la que los esfuerzos de teorización estuvieron al servicio del control de las relaciones del hombre con su espacio circundante.

Sin embargo, la construcción de objetos geométricos y el desarrollo posterior de la geometría como rama de la matemática se ha “desprendido” de dichos espacios físicos y se ha constituido en el estudio de un espacio ideal con “objetos teóricos” que obedecen a las reglas del trabajo matemático. Posiblemente algunas figuras geométricas (cuadrado, círculo, rectángulo) hayan sido creadas en un intento por modelizar las formas de objetos físicos. Babini (1967) señala, incluso, que los nombres que Euclides utiliza para las formas hacen referencia a dichos objetos. Ahora bien, esas figuras, una vez conceptualizadas, ya son en sí mismas “objetos teóricos”. Y las propiedades que se formulan sobre ellas ya no tienen necesariamente referentes físicos. Es más, no se verifican en los objetos físicos muchas de las propiedades que sí se cumplen en los objetos geométricos (por ejemplo, una mesa cuadrada no tiene sus cuatro lados iguales indefectiblemente, en tanto que el cuadrado sí). El proceso de creación de objetos geométricos abandona luego sus referentes físicos originales y crea objetos teóricos “puros” (por ejemplo, los dodecágonos cóncavos) y relaciones teóricas “puras” (por ejemplo, la suma de ángulos interiores de una figura).¹

Gálvez (1994) alude a este proceso mostrando cómo el espacio físico de aquella primera geometría empírica deviene en “espacio puro, formal”. Un hito en esta transformación está dado por la aparición de *Elementos* de

1. La propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo es un objeto teórico que precisa ser demostrado por medio de argumentaciones. Han sido analizadas críticamente aquellas propuestas de enseñanza que tratan a esta propiedad de manera empírica. Evidentemente, por los errores del trazado y de la medición, es bastante difícil que la suma de ángulos interiores de un triángulo medidos con transportador sea 180° (Balacheff, 1987).

Euclides, momento culminante en el desarrollo de la geometría en tanto rama de la matemática que marca el inicio en la separación de los conceptos geométricos de lo sensible. Babini (1967) se refiere a dicho hito mostrando cómo Euclides le confirió a la geometría “el sentido de seguridad y de certeza” de los resultados que se van produciendo más allá de la intuición y de la verificación empírica. Las verdades geométricas a las que se arriba son “anexactas, abstractas, necesarias y sin referencia a la realidad” (Gálvez, 1994).

Esta primera geometría puede ser denominada “geometría empírica”, “geometría intuitiva” o “geometría de la observación”, mientras que aquella geometría ya desprendida del espacio sensible sería la “geometría de las matemáticas” o “geometría de la demostración”. Las relaciones entre una y otra son aún hoy objeto de reflexión y de investigación. Ahora bien, no todos los conocimientos espaciales empíricos devinieron objetos matemáticos puros. Muchos, incluso algunos de uso social actual, refieren al estudio del espacio físico y no necesariamente forman parte de la disciplina matemática, como es el caso de la interpretación de mapas o planos. La pertenencia o no a la disciplina permite una primera distinción entre conocimiento geométrico y conocimiento espacial.

Hemos señalado que los conocimientos geométricos constituyen espacios teóricos ideales. Esta característica exige que la validación de los resultados obtenidos sólo pueda ser racional y argumentativa. En cambio, los conocimientos espaciales permiten resolver problemas del espacio físico y el modo de determinar la validez de los resultados encontrados no necesita respetar las reglas del trabajo geométrico, sino que es, en la mayor parte de los problemas, de naturaleza empírica. He aquí otra distinción entre el estudio de lo espacial y el estudio de la geometría referida ahora al modo de validación de resultados y conocimientos (Berthelot y Salin, 1993).

Por otra parte, sabemos de ciertas diferencias entre los procesos constructivos de los conocimientos geométricos y de algunos conocimientos espaciales. Los niños utilizan el espacio y construyen conocimientos prácticos que les permiten dominar sus desplazamientos y construir sistemas de referencias. En el uso “real” del espacio (cuando un niño va de su cuarto al baño, cuando patea una pelota hacia un arco, etcétera) no necesariamente pone en juego conocimientos matemáticos. Estos conocimientos espaciales son adquisiciones espontáneas, independientes del pasaje de los niños por la escuela (Berthelot y Salin, 1993; Broitman, 2000; Castro,

2000; Saiz, 1987): La construcción de estas nociones espaciales ha sido estudiada por Piaget (Piaget e Inhelder, 1948; Piaget, Inhelder y Szeminska, 1973).

En cambio, los conocimientos geométricos de la matemática, si bien pueden tener una construcción que permita hablar de una geometría intuitiva, precisarán, para su adquisición, de un marco institucional con intencionalidad didáctica. He aquí una nueva distinción entre el estudio del espacio y de la geometría. Queda pendiente aún conocer con mayor profundidad los procesos de construcción de conocimientos geométricos por parte de los niños desde su propia geometría intuitiva hacia la geometría que aprenderán en la escuela. El pasaje de la intuición al saber, de los conocimientos iniciales a los sistemáticos, tiene aún muchos interrogantes y señalamos allí nuevamente un área de vacancia de indagaciones didácticas.

Hemos intentado relevar ciertas distinciones entre conocimientos espaciales y geométricos. Sin embargo, tienen rasgos comunes. Uno de ellos es el poder anticipatorio. Por ejemplo, el conocimiento acerca de la representación plana de un cierto espacio físico permite anticipar cuál es el recorrido más conveniente para desplazarse de un lugar al otro sin necesidad de estar "presente" en el espacio físico representado. Un ejemplo del poder anticipatorio de los conocimientos geométricos es la utilización de propiedades de las figuras para determinar el valor de los ángulos interiores de un triángulo equilátero, sin necesidad de medirlos.

Mencionamos que muchos conocimientos espaciales son de naturaleza espontánea. Sin embargo, existen algunos cuya adquisición no lo es, por ejemplo, los referidos a la producción e interpretación de planos. Éstos involucran representaciones simbólicas convencionales y por lo tanto exigen, para su construcción, de una interacción sistemática con dichos objetos y de un caudal de información que debe ser comunicado. El tipo de actividad intelectual que demanda a los alumnos la adquisición de estos conocimientos es bastante próxima a la adquisición de conceptos matemáticos en general y geométricos en particular. Muchas investigaciones concluyen en la necesidad e importancia de considerar estos conocimientos como objetos de enseñanza en la escuela (véase el capítulo 4, en este volumen). Consideramos que su proximidad a los objetos matemáticos y su cercanía en el modo de adquisición justificarían su inserción escolar en el área de la matemática.

Tal vez sea fértil retomar aquí la distinción entre conocimiento y saber:

Los conocimientos son los medios, a menudo implícitos, de la acción, del procesamiento de la información o del razonamiento, por oposición a los saberes que son los objetos visibles de las transacciones didácticas (Brousseau, 1994).

El saber es el producto cultural de una institución que tiene por objeto observar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación (Brousseau y Centeno, 1991).

Estos conceptos son útiles para estudiar la problemática de la enseñanza, considerada también como "relevo de conocimientos a saberes"² (Brun, 1994). Los conocimientos pueden ser más o menos privados, más o menos locales, válidos o erróneos y pueden no tener referencia directa en la disciplina matemática. El saber, en cambio, sí tiene referencia en la disciplina y en la comunidad de matemáticos.³ ¿Qué nos aporta esta distinción? Por una parte, permite reconocer que muchos de los conocimientos geométricos de los niños pequeños que se hacen circular en la escuela no tienen aún el *status* de saberes matemáticos. La vinculación entre los conocimientos de los niños y el saber es de carácter progresivo. La enseñanza justamente tiene la responsabilidad de hacerlos evolucionar con la mirada puesta en el saber. Por otra parte, muchos autores coinciden en señalar que la escuela puede considerar objetos de enseñanza no sólo a los saberes. Esta distinción permite identificar ciertos conocimientos espaciales que, aunque no formen parte de la matemática, pueden ser considerados objetos de enseñanza (como los ya mencionados relativos a la representación plana del espacio).

2. El término "relevo" es utilizado en el original en francés en el sentido de "cambio de *status*".

3. Esta distinción no es dicotómica. Los conocimientos de un grupo escolar podrían considerarse saberes para esa "comunidad".

3. ENTRE LO SENSIBLE Y LO INTELIGIBLE: UNA GRAN VARIEDAD DE PROBLEMAS

A partir del análisis precedente es posible distinguir tipos de problemas según los conocimientos involucrados y el proceso de adquisición de éstos.

Existen ciertos problemas que se resuelven exclusivamente con conocimientos espaciales, cuya adquisición es aparentemente espontánea y, en principio, no precisarían ser considerados objetos de enseñanza en la escuela. Tal es el caso de los problemas de desplazamiento efectivo en el espacio físico, problemas ligados a las nociones espaciales estudiadas por Piaget. Otros problemas son aquellos que también involucran conocimientos espaciales, y de los que no sabemos aún cómo se da su proceso de adquisición. Son, de alguna manera, muy similares a los anteriores, pero una diferencia la constituye el hecho de que no son producto del desarrollo espontáneo. Un ejemplo es la orientación en espacios de "grandes" dimensiones. Sabemos que hay adultos que tienen importantes dificultades para orientarse en dichos espacios; tal vez por ello podría justificarse la necesidad de una enseñanza sistemática. Brousseau (1983, citado en Vergnaud, 1997) analiza que en los problemas espaciales una variable didáctica⁴ es el tamaño del espacio —si se trata del microespacio, el mesoespacio o el macroespacio—. ⁵ En la comparación entre este tipo de problemas y el anterior, podría considerarse el tamaño del espacio como variable. La magnitud del espacio físico en el que se debe desenvolver el sujeto modifica sustancialmente el problema y los medios de resolución. De ahí la diferencia entre los problemas de desplazamiento en el interior de una vivienda (que exigen conocimientos cuya adquisición es espontánea), de los problemas de desplazamiento en una ciudad (que exigen conocimientos cuya adquisición involucra niveles más complejos de conceptualización, representación y anticipación).⁶

4. Se podrá encontrar una definición de este concepto elaborado por Brousseau en el capítulo 4 de este volumen.

5. Incluso el macroespacio puede ser distinguido en función de la homogeneidad. No parecen ser del mismo nivel de complejidad la orientación espacial en el medio del océano que en una ciudad. La heterogeneidad del espacio permitiría construir mentalmente puntos de referencia —a quien esté en condiciones de identificarlos—.

6. Serán necesarias investigaciones psicológicas y didácticas que expliquen si es posible intervenir didácticamente y cómo para contribuir a la adquisición de conocimientos ligados a la orientación espacial en grandes dimensiones.

Podríamos considerar que existe una tercera clase de problemas similares a los anteriores —en tanto se resuelven con conocimientos espaciales cuya adquisición tampoco es espontánea—, pero en los que ya sabemos que es posible intervenir didácticamente para favorecer su adquisición. Se trata de los problemas de producción e interpretación de representaciones planas y comunicación de la posición de objetos y desplazamientos en el espacio (Colinvaux y Dibar Ure, 1989; Gálvez, 1985; véase también el capítulo 4 de este volumen). Si bien son problemas vinculados a la orientación espacial en grandes dimensiones, exigen conocimientos más específicos, por ejemplo, acerca de las figuras (éstas pueden utilizarse para producir representaciones planas) o informaciones y convenciones (para interpretar y producir representaciones). Muchos autores (Berthelot y Salin, 1993; Saiz, 1987) coinciden en señalar la necesidad de que este tipo de problemas forme parte de la currícula escolar. Hay experiencias didácticas al respecto que muestran la continuidad de las dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con representaciones de espacios físicos cuando no han abordado sistemáticamente este objeto de estudio. Por otra parte, también es posible observar la evolución de sus representaciones cuando se generan condiciones didácticas para que los alumnos tengan oportunidades de mediar con problemas diversos de producción e interpretación de planos (Broitman, 2000).

También sabemos de aquellos problemas espaciales que se resuelven con conocimientos geométricos. Berthelot y Salin los denominan problemas "espacio-geométricos". Algunos ejemplos son las aplicaciones del teorema de Tales⁷ para determinar la altura de objetos no posibles de ser medidos empíricamente (montañas, pozos, etcétera), o la decisión sobre cuáles medidas tomar para reproducir un objeto o parte de él (una forma triangular, un vidrio romboidal, una arandela a partir de una porción de ella, etcétera). Este tipo de problemas también se inscribe en las relaciones complejas entre el espacio físico y el espacio matematizado. La enseñanza —como desarrollaremos más adelante— ha justificado con este tipo de problemas la finalidad de los conocimientos

7. Es interesante señalar aquí que en realidad el teorema de Tales es un conocimiento que, si bien es geométrico, se origina por problemas del espacio físico. Una vez constituido como objeto teórico permite ser reutilizado, tanto en problemas de la geometría matemática como del espacio sensible.

geométricos. Es importante señalar que la mayor parte de los ejemplos en los cuales los conocimientos geométricos de la matemática son útiles para resolver problemas del espacio sensible por su nivel de complejidad conceptual son abordables recién en el segundo o el tercer ciclo de la EGB.

Por último, tenemos aquellos problemas que se resuelven con conocimientos geométricos que "viven" en la disciplina y que indudablemente precisan de un trabajo sistemático para su apropiación. Se trata de todos aquellos problemas geométricos "puros", que no tienen su paralelo en la realidad, ni en la vida social, ni en la experiencia. Por ejemplo, todos los problemas que involucran propiedades de figuras y cuerpos geométricos. Evidentemente, estas clases de problemas no constituyen categorías excluyentes, ni pretenden ser exhaustivas o definitivas. Se trata simplemente de un análisis con el fin de aportar al debate y su necesaria profundización.

Uno de los objetivos de esta distinción es llamar la atención sobre la necesidad de constituir en objetos de estudio en el primer ciclo —y por qué no en el segundo— de la EGB a todos aquellos conocimientos espaciales cuya adquisición no es espontánea, es decir, tanto a aquellos problemas ligados a la orientación espacial en grandes dimensiones como a los problemas de la representación plana del espacio sensible. Nos permite también señalar la innecesariedad de abordar didácticamente la enseñanza de conocimientos espaciales cuya adquisición es espontánea. Y por último, nos alerta también acerca de la imposibilidad de justificar, en el primer ciclo de la EGB, la enseñanza de la geometría de la matemática como medio de resolución de problemas del espacio real. La validez de la enseñanza de la geometría de la matemática deberá ser justificada por otras razones que expondremos más adelante. O bien podría ocurrir que, en algún momento de la evolución de la didáctica de la matemática o de profundas revisiones de las decisiones curriculares fundamentadas en la investigación, se empiece a considerar como objeto de estudio, en el primer ciclo, a los problemas espaciales, y recién en el segundo ciclo, a los problemas geométricos de la matemática o problemas espacio-geométricos. Dejamos planteado este interrogante.

4. ADQUIRIR CONOCIMIENTOS Y "UN MODO DE PENSAR" GEOMÉTRICOS COMO APROPIACIÓN CULTURAL

Muchas propuestas didácticas también plantean desde sus fundamentos la idea de que enseñar matemática debe servir para la vida cotidiana o para aprender a desenvolverse mejor en el espacio físico. Dichas ideas ponen en juego el debate acerca de la finalidad de la enseñanza de la geometría. Adoptan, desde nuestra perspectiva, una concepción instrumentalista de la enseñanza de la matemática: se le exige que sea "útil" o que "sirva" para algo externo.

He aquí dos problemas: uno refiere a la finalidad externa y el otro a sus relaciones con el espacio físico. Con respecto al primero, pensamos que un objetivo de la enseñanza de la matemática puede ser su utilidad para resolver problemas de la vida cotidiana o el uso social de ciertos conocimientos, pero dicha finalidad no debería ser exclusiva ni prioritaria. Desarrollaremos estas ideas más adelante. Con respecto a la segunda cuestión, acerca de las relaciones del estudio de la geometría de la matemática con el espacio físico, hay, en diversos ámbitos educativos, una cierta "voluntad de establecer relaciones naturales entre lo sensible y lo inteligible" (Laborde, 1990), entre lo perceptivo y lo teórico. Hemos mostrado anteriormente la compleja relación entre los conocimientos espaciales y los geométricos. Y si bien hemos señalado que hay conocimientos geométricos que permiten resolver problemas espaciales, no hay, al menos por ahora, evidencias concluyentes de que estudiar geometría de la matemática en los primeros años de la escolaridad permita un mayor dominio del espacio físico real. En este sentido, Brousseau (1994) señala que "no es cierto que la geometría se refiera a las relaciones con el espacio".

Tal vez muchos conocimientos geométricos que forman parte de la currícula escolar no "sirvan" para la vida cotidiana, y tampoco favorezcan necesariamente la conceptualización sobre el espacio físico. ¿Cuál será entonces la finalidad de la enseñanza de la "geometría de la matemática", geometría casi alejada de lo real, de lo sensible, de lo empírico, de lo intuitivo, de lo útil?

La motivación principal de la enseñanza de la geometría no debería ser, desde nuestro punto de vista, la "utilidad práctica", sino el desafío intelectual que ella misma involucra. "Una centración exclusiva en la utilidad hace perder de vista a la matemática como producto cultural, como práctica,

como forma de pensamiento" (Sadovsky *et al.*, 1999). Y en relación con la utilidad que se le asigna a la geometría para el dominio del espacio físico adoptamos la reflexión de Laborde: "La geometría de las matemáticas no es el estudio del espacio y de nuestras relaciones con el espacio, sino el lugar en que se ejercita una racionalidad llevada a su excelencia máxima" (Laborde, 1984, citado en Gálvez, 1994).⁸

Una de las razones principales por las cuales es importante la enseñanza de la geometría es porque la escuela es también un lugar de creación y transmisión de la cultura. Y la geometría forma parte de ella.

Cuando se hace referencia a la importancia de "transmitir la cultura" se corre el riesgo de una interpretación que considere que dicha transmisión debe ser realizada como una comunicación directa del saber geométrico. Éste, sabemos, ha sido un rasgo característico de la enseñanza durante muchos años. Estamos concibiendo "transmitir la cultura" con un sentido diferente: los recortes del saber cultural geométrico pueden ser adquiridos por los alumnos en el marco de un trabajo intelectual matemático de resolución y análisis de problemas, de debate y argumentación acerca de éstos, que les permita, simultáneamente a la apropiación de aspectos o recortes de dichos "objetos del saber", el acceso a un modo de pensar y de producir. La adquisición de un tipo de actividad intelectual propia de la construcción de conocimientos matemáticos es, desde nuestro punto de vista, una condición indispensable para acceder a la cultura matemática. Si esto no es considerado como parte de la enseñanza, se corre el riesgo de transmitir únicamente los resultados.

Como señala Artigue (1986): "Lo que se propone la enseñanza de la matemática no es simplemente la transmisión de conocimientos matemáticos, sino, más globalmente, la transmisión de una cultura. Se trata de que los alumnos entren en el juego matemático". La geometría no constituye solamente un conjunto de saberes formalizados a lo largo de la historia, sino que es también un modelo de razonamiento y deducción muy importante para la formación cultural de los sujetos.

En síntesis, la enseñanza de la geometría en la EGB puede apuntar a dos grandes objetivos. En primer lugar, a la construcción de conocimientos cada

8. Evidentemente, cuando Laborde afirma que la geometría de la matemática no estudia el espacio, se está refiriendo al espacio físico. Como ya hemos desarrollado anteriormente, la geometría de la matemática sí estudia el espacio matematizado.

vez más próximos a "porciones" de saber geométrico elaborados a lo largo de la historia de la humanidad. En segundo lugar, y tal vez sea el más importante, al inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico. Ambos objetivos están estrechamente imbricados.

Analicemos ahora el primer objetivo. Entre todo el bagaje de conocimientos geométricos acumulados, ¿cuáles pueden considerarse, en la EGB, como principal objeto de estudio? Evidentemente el recorte, selección y secuenciación de saberes matemáticos a enseñar forma parte del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1997). Es posible rastrear diferentes decisiones y podemos imaginar otras nuevas, a partir de las cuales se seleccionen conocimientos aún nunca puestos en juego en este nivel de la enseñanza. El recorte actual involucra el estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos. ¿Por qué esta geometría?⁹ ¿Por qué estos objetos –y no otros– de esta geometría?

Entre las diversas geometrías existentes es posible considerar que la geometría euclídea involucra un nivel de complejidad accesible a los alumnos de este nivel de escolaridad, a diferencia de lo que sucede con la geometría proyectiva o la geometría de los fractales. También es posible pensar que la geometría euclídea es una "vía regia" para el inicio en el estudio de un modo de pensar geométrico, también sobre la base de sus niveles de complejidad. Otra buena razón –al menos por ahora– para considerar las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como principales objetos de estudio en la escuela primaria es que se trata de objetos que "viven" allí desde hace muchos años. Esto no significa que la supervivencia sea razón suficiente para su permanencia. Sin embargo, no hay –por ahora– razones para "echarlos". Seguramente, en el futuro, nuevas investigaciones didácticas lleven a un proceso de reelección de recortes aun dentro de la misma geometría o, tal vez, se consideren objetos de enseñanza a saberes geométricos de otras geometrías existentes.

9. De hecho, se ha intentado enseñar nociones topológicas en el Nivel Inicial y en el primer ciclo de la EGB de la mano de la "reforma de la matemática moderna" y sobre la base de la evolución espontánea de los conocimientos espaciales de los niños estudiada por Piaget. Ha sido suficientemente analizada la confusión entre psicología y didáctica y el aplicacionismo directo de resultados de indagaciones psicogenéticas a la enseñanza (Brun, 1980; Coll, 1983; Castorina *et al.*, 1998, entre otros).

Habiendo apenas mencionado algunas provisionales e insuficientes justificaciones para considerar a la geometría euclídea como única geometría a estudiar en la EGB, o para considerar al estudio de las figuras y cuerpos como principales objetos de enseñanza, dejamos por ahora de lado dicha discusión, mencionando la necesidad de profundizar en este tipo de análisis.

Nuestro primer objetivo mencionado —el estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos— puede ser abordado desde el primer ciclo. Es importante hacer una nueva aclaración. Las propiedades geométricas de las figuras y los cuerpos forman parte, sin duda, del conjunto de saberes geométricos. Evidentemente, los niños —retomamos para ello la distinción entre conocimiento y saber anteriormente mencionada— pondrán en juego ciertos conocimientos sobre las figuras que aún distan mucho de las propiedades enunciadas por el saber, así como sucede con otros objetos matemáticos. Las características que los niños podrán utilizar o formular son aquellas versiones provisionales “privadas” de las propiedades “públicas” del saber sabio.¹⁰ El pasaje de unas a otras será parte de un proceso que excede el trabajo en el primer ciclo. Más adelante abordaremos el análisis de algunos problemas que permiten poner en juego el estudio de dichas características.

Otro problema didáctico del primer ciclo es el tratamiento aparentemente inevitable de los “dibujos” de las figuras geométricas y de las representaciones tridimensionales de los cuerpos. Ha sido suficientemente estudiada la distinción entre dibujo y figura (Arsac, 1989; Laborde, 1990; Fregona, 1995a y b). Las figuras son objetos teóricos, matemáticos e ideales que sólo tienen existencia en el interior de la geometría de la matemática. No son objetos tangibles de existencia empírica. Los dibujos, en cambio, son representaciones materiales de dichos objetos que no “muestran” las propiedades que definen a las figuras. Las conceptualizaciones de los sujetos acerca de los objetos geométricos son las que determinan qué propiedades pueden “verse” en los dibujos.

Ha sido estudiado cómo la enseñanza de la geometría estuvo organizada en la presentación ostensiva¹¹ de dibujos como así también algunas con-

10. Evidentemente, también el saber sabio tiene carácter provisional.

11. Berthelot y Salin (1994) caracterizan a la enseñanza ostensiva como aquella en la que las figuras son “mostradas”. Analizan críticamente el supuesto psicológico y didáctico de que los alumnos podrán identificar propiedades de las figuras a través de la percepción.

secuencias de dicha forma de “hacer vivir” las figuras en las aulas: los alumnos tienden a transferir ciertas propiedades de los dibujos a las figuras (la posición en la hoja, restricciones a figuras que no las poseen, etcétera). Un ejemplo de cómo se “amalgaman” propiedades a las figuras puede analizarse cuando, frente al pedido de construir un rombo, los alumnos tienden a construir un rombo cuadrado; o, frente al pedido de construcción de un cuadrilátero, tienden a construir un rectángulo. Las dificultades para comprender la generalidad y la particularidad de las figuras también se refuerza didácticamente por la presentación casi exclusiva de “figuras típicas” (Berthelot y Salin, 1994; Fregona, 1995a y b, entre otros).

Ahora bien, muchas de las propuestas didácticas que intentan subsanar esta relación casi “natural” o identificación entre objetos geométricos y dibujos que los representan están dirigidas al segundo o al tercer ciclo. No encontramos, por ahora, formas de abordar en el primer ciclo el estudio de las figuras geométricas sin considerar como punto de partida los dibujos con los que las representamos.

La problemática de las relaciones entre dibujos y figuras también se inscribe en el marco de la relación entre conocimientos y saberes. Por un lado, hay decisiones ligadas al proceso de transformación de saberes en conocimientos a enseñar: ¿cómo iniciar a los alumnos en el estudio de las figuras y no exclusivamente de los dibujos con los cuales las representamos? Por otra parte, involucra el pasaje de los conocimientos construidos por los niños en esos primeros años a saberes: ¿cómo hacer avanzar dichos conocimientos iniciales sobre los dibujos hacia conocimientos sobre las figuras más próximos al saber?¹²

Volvamos al segundo objetivo planteado: el inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico. Este “modo de pensar” supone poder apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades. Es decir, realizar un proceso de anticipación sobre los resultados a obtener sin necesidad de rea-

12. Cuando los niños conocen los dibujos pueden distinguir el dibujo de un cuadrado entre otros dibujos de otras figuras. Pero el conocimiento de las propiedades de los cuadrados les permitirá a los alumnos resolver una gama más amplia de problemas que no involucran exclusivamente el terreno de la percepción. Por ejemplo, podrán construirlos, comunicar a otros alumnos sus características, formular preguntas para adivinar de cuál figura se trata, etcétera.

lizar acciones empíricas y sin apoyarse exclusivamente en la percepción. El modo de pensar geométrico implica demostrar la validez de una afirmación a través de argumentos, los que, incluso en algunos casos, se oponen a la percepción o a la medida.¹³ Estos aspectos del estudio de la geometría se inician en los primeros años de la EGB, pero son más propios del segundo y el tercer ciclos. En los problemas que se analizan a continuación se mostrará dicho juego anticipatorio.

Destacamos aquí la importancia de ofrecer condiciones para que todos los alumnos se apropien de este particular modo de pensar, tan diferente del de otras áreas del conocimiento, a veces casi opuesto a la racionalidad cotidiana. Forma parte del conjunto de conocimientos que la escuela tiene la obligación de socializar, ya que, si no se aprenden en la escuela, difícilmente se aprendan.

Creemos que hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar, propio de la matemática, que sólo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber la que está en juego (Sadovsky *et al.*, 1998).

Señalamos entonces un "riesgo": considerar a la matemática "útil" como necesaria "para todos" y a la matemática en tanto "modo de pensar" como lujo accesible exclusivamente "para unos pocos" permite justificar prácticas de enseñanza discriminatorias. Subyace al presente debate didáctico una cuestión ideológica: si fomentar o no el acceso de todos los niños al "modo de pensar" geométrico, sin duda "porción" de la cultura.

5. PROBLEMAS QUE PERMITEN INICIAR A LOS NIÑOS EN EL ESTUDIO DE CARACTERÍSTICAS DE FIGURAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

Las propiedades de los cuerpos y figuras geométricos son objetos matemáticos que precisan ser estudiados a lo largo de varios años. Por una parte, por la diversidad de propiedades que pueden ser objeto de trabajo

13. Por ejemplo, la construcción de un triángulo cuyos lados midan 10, 5 y 5 podría admitir una "resolución empírica", aunque dicho triángulo no existe.

en cada año o ciclo; por otra, por la complejidad y diversidad de problemas en los que es posible que dichas propiedades se constituyan en un medio de resolución. Se presenta a continuación el análisis didáctico de algunos problemas que favorecen el avance de los conocimientos de los alumnos sobre estos objetos geométricos en los primeros años de la escuela primaria.

El primer problema que se presenta tiene la forma de un juego de adivinación. Está pensado para que sea incluido al inicio de un proyecto de enseñanza en primero o segundo año¹⁴ que apunte a la conceptualización, por parte de los alumnos, de un conjunto de propiedades de las figuras geométricas.

5.1. Juego de adivinación de figuras¹⁵

Objetivo

El objetivo principal de la siguiente actividad es que los alumnos identifiquen y expliciten algunas características de ciertas figuras de modo tal que otro alumno pueda reconocerlas. Este problema también permite la incorporación de cierto vocabulario convencional.

Presentación del problema

Se les presenta a los alumnos la siguiente colección de figuras:

14. Este problema también puede presentarse a alumnos de tercer año de la EGB que no hayan tenido oportunidad de enfrentarse con anterioridad a un problema similar. Asimismo, "relajando" las variables didácticas, podría ser planteado a alumnos del Nivel Inicial.

15. La idea de un juego de adivinación —aunque para otros objetos matemáticos— ha sido tomada del "Juego del retrato" (1988) publicado en "Un, deux... beaucoup, passionnément!", *Recontres Pédagogiques*, n° 21, y de la secuencia didáctica elaborada por Saiz y Fregona (1984): "Quién adivina el número", Laboratorio de Psicomatemática, DIE-CINVESTAV.

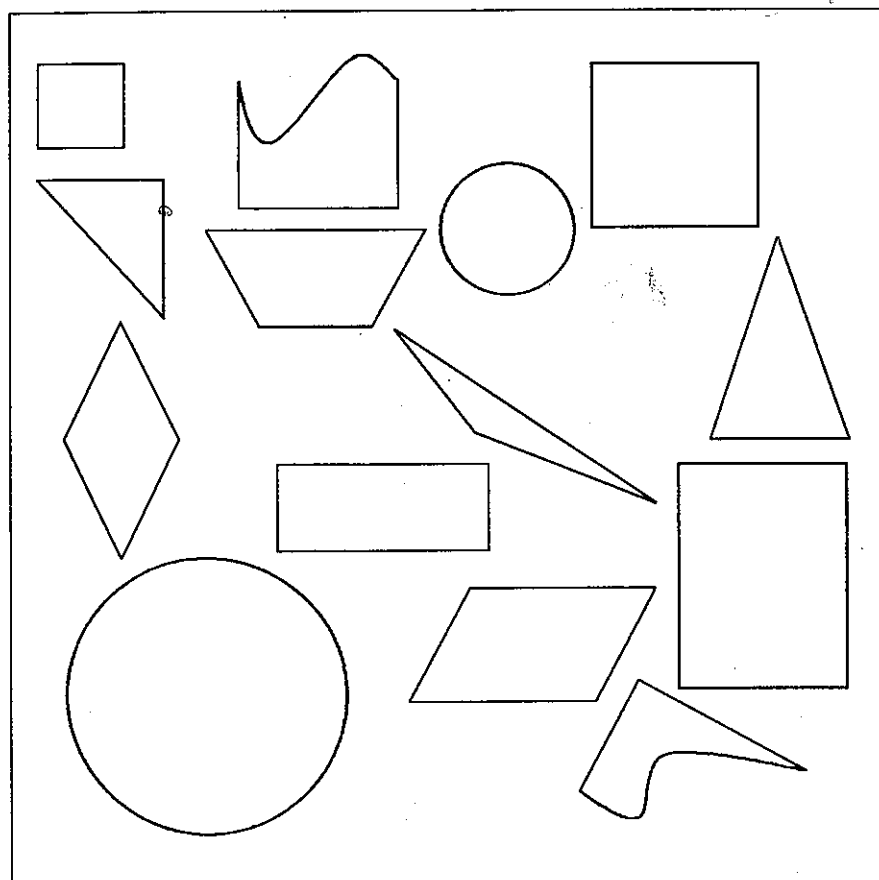


Figura 1

El docente piensa en una de ellas, pero no dice en cuál. Los alumnos tienen que elaborar preguntas que sólo admitan por respuesta "Sí" o "No". Mediante dichas preguntas y las respuestas que da el docente, los niños deberán descubrir de qué figura se trata.

Variables didácticas

Una variable didáctica de este problema está dada por las propiedades que se ponen en juego en la colección de figuras. En nuestro caso,

el universo seleccionado responde a las siguientes propiedades: cantidad de lados, lados rectos o curvos, cantidad de vértices, longitud de los lados, etcétera (aunque los niños no recurran a los términos convencionales).¹⁶

El soporte material constituye otra variable didáctica. Se ha tenido presente al conformar la colección de figuras que no puedan ser distinguidas entre sí por atributos no geométricos, como color o textura (si las figuras fueran de diferente color o diferente textura, estos atributos les permitirían a los alumnos distinguirlas sin necesidad de considerar propiedades geométricas).

La variedad de figuras es también otra variable didáctica. En la colección presentada se les exige a los alumnos precisar la caracterización, de tal manera que no les sea suficiente con usar un nombre o una sola propiedad (por ejemplo, no basta preguntar "¿Es el cuadrado?" o "¿Tiene cuatro lados?" para determinar de qué figura se trata). Por ello se presentan varios cuadrados, varios rectángulos, varios triángulos, etcétera. Para garantizar esta variedad es necesaria entonces una cierta cantidad de figuras. Un trabajo con pocos elementos en la colección (cuatro o cinco) probablemente limitaría las posibilidades de establecer características y no exigiría a los niños un análisis más preciso de las propiedades involucradas.¹⁷

Otra variable son las condiciones para la formulación de las preguntas. La restricción de que sólo puedan ser contestadas con "Sí" o "No" apunta a provocar la explicitación de propiedades en la formulación de las preguntas y a inhibir preguntas menos precisas ("¿Cómo es?", "¿Qué forma tiene?", etcétera).

16. Si la intención fuera, por ejemplo, que los alumnos identificaran clases de triángulos en función de sus ángulos, el universo de figuras estaría solamente conformado por diversos triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos. Aunque los alumnos no conocieran los términos convencionales, se verían exigidos a nombrar a su modo las características de aquéllos para diferenciarlos.

17. Evidentemente la cantidad de figuras depende de cómo garantizar una variedad. Para identificar propiedades de ángulos o lados de triángulos podría ser suficiente con seis o siete triángulos.

Desarrollo de la actividad

La puesta en marcha de esta actividad demanda la consideración de dos fases bien diferenciadas: una de elaboración de preguntas para adivinar de qué figura se trata y otra de análisis de las preguntas que busca una progresiva descontextualización y explicitación de las propiedades de las figuras geométricas. Estas dos fases se repiten en cada instancia de juego.

- *Primera fase. Juego de preguntas y respuestas*

En esta primera fase, el docente presenta el juego y el material. Explica a los alumnos que ha pensado en una figura y que ellos deben realizar preguntas para adivinar cuál es la figura que él ha elegido. Las preguntas solamente pueden ser contestadas con "Sí" o "No". Se busca que los alumnos formulen características que vayan identificando.

Las primeras preguntas que los niños elaboren darán cuenta de sus conocimientos iniciales: algunas características de las figuras geométricas y un cierto vocabulario sobre sus elementos. Por ejemplo, la palabra "lados", la identificación de "lados iguales", "lados inclinados", "cuatro puntas", etcétera. Estos conocimientos puestos en juego desde el inicio del problema se constituirán en puntos de partida para la producción de nuevos conocimientos.

Es esperable una heterogeneidad en la clase en relación con las propiedades identificadas que forman parte de las preguntas, el vocabulario utilizado y el procesamiento de la información (cómo se elaboran preguntas y cómo se consideran las preguntas y respuestas ya dadas). La explicitación y circulación de estos conocimientos heterogéneos será la finalidad de la segunda fase.

- *Segunda fase. Análisis de las preguntas*

Luego de "jugar" dos o tres veces, las preguntas mismas se transforman en objeto de análisis. Ahora se busca hacer circular y sistematizar los conocimientos iniciales cuya aparición se ha promovido desde el primer juego. Para esta fase es central considerar la gestión de la clase por medio de una diversidad de intervenciones del docente.

Serán necesarias ciertas intervenciones del docente dirigidas a que los alumnos analicen la pertinencia y eficacia de las preguntas. Con respecto a la pertinencia se intentará que descarten aquellas preguntas que no

puedan ser contestadas con "Sí" o con "No" y logren reformularlas. Por ejemplo, una posible intervención del docente en este sentido podría ser: "Algunos chicos preguntaban: ¿cuántos lados tiene la figura? ¿Se puede hacer esa pregunta? ¿Cómo hacer para averiguar cuántos lados tiene y que se pueda contestar 'sí' o 'no'?"

En relación con la mayor o menor eficacia de ciertas preguntas se promoverá analizar cuáles preguntas permiten descartar más figuras y cuáles permiten descartar pocas o una sola y comparar en qué momento del juego es conveniente formular unas u otras. Por ejemplo, si frente a la pregunta "¿Es un círculo?" se obtiene una respuesta negativa, se descartan dos figuras. La pregunta "¿Tiene lados curvos?" permite descartar más figuras.

Algunas intervenciones permiten recuperar aquellas caracterizaciones establecidas por los niños en la primera fase de trabajo a partir del análisis de algunas de las preguntas formuladas. Por ejemplo: "Algunos chicos preguntaron: '¿Tiene los lados inclinados? ¿Qué figuras tienen lados inclinados?'". O, por ejemplo: "¿Estas figuras (mostrando el trapecio isósceles, el paralelogramo y el rombo) tienen los lados inclinados?". Otro ejemplo de intervenciones que apuntan a que todos los alumnos identifiquen aquellas características que algunos niños han considerado anteriormente podría ser "Algunos chicos preguntaban si tenían 'lados redondos'. ¿Esta pregunta les parece que les puede servir para otra vez que juguemos? ¿Por qué?"

Otras intervenciones tienen la intención de que los alumnos tomen conciencia de que ciertas características no son suficientes como para poder adivinar y ganar el juego, ya que hay varias figuras con cada característica. Por ejemplo: "Si un chico pregunta si tiene cuatro lados y le contesto que sí, ¿ya puede saber seguro cuál figura es?". O bien: "¿Qué convendría preguntar después?"

La incorporación de vocabulario específico también requerirá de ciertas intervenciones. Por ejemplo: "Para ponernos de acuerdo, vamos a llamar a los lados redondos 'lados curvos'. Nombraremos a las puntas como vértices", etcétera.

Otras intervenciones didácticas en el marco del trabajo colectivo que merecen ser destacadas son aquellas que permiten a los alumnos tomar conciencia de aquello nuevo que ha circulado en la clase y que deben retener. El registro de los nuevos conocimientos puede adoptar

la forma de "conclusiones", de "sugerencias de buenas preguntas", o bien de "consejos para jugar mejor". Por ejemplo: "Vamos a anotar aquí en este cartel algunos consejos para jugar mejor"; "En este cartel quedarán anotadas algunas preguntas que hoy vimos que eran muy útiles para saber rápido de qué figura se trata"; "Hoy vimos que eran preguntas muy importantes si las figuras tenían cuatro lados o si tenían tres lados. Vamos a registrarlas para que nos sirvan para mañana cuando sigamos jugando"; "Si ya sabemos que tienen cuatro lados, entonces se puede averiguar si son iguales", etcétera. El registro colectivo e individual —en los cuadernos— apunta, desde la perspectiva de los alumnos, a disponer de recursos que les permitan "jugar mejor". Desde la perspectiva de la enseñanza, tiene por finalidad promover la reutilización de lo aprendido, es decir, propiciar avances en los conocimientos.

Los nuevos conocimientos producidos, institucionalizados¹⁸ y registrados pueden ser evocados en nuevas jugadas.¹⁹ Un ejemplo de intervención que apunta a recordar los avances producidos en clases anteriores es "Vamos a recordar antes de jugar todo lo que aprendimos ayer, así hoy jugamos mejor. Entonces voy a leer los carteles que están colgados así nos acordamos de las cosas que ya aprendimos".

En síntesis, la gestión de esta segunda fase requiere de una variada gama de intervenciones que promueven la explicitación de propiedades, la circulación de conocimientos entre los alumnos, el avance de las conceptualizaciones realizadas por los alumnos durante la primera fase de juego, la toma de conciencia del progreso en los conocimientos, la incorporación de nuevo vocabulario, etcétera.

Estas dos fases de trabajo —el juego de preguntas y respuestas y el posterior análisis de las preguntas— deberán ser desplegadas sucesivamente a lo largo de varias clases de manera tal de promover la reutilización de

18. La toma en cuenta "oficial" por el alumno del objeto de conocimiento y por el maestro del aprendizaje del alumno es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización (Brousseau, 1994).

19. Perrin Glorian (1995) y Margolinas (1993) indican una serie de intervenciones del docente, como sugerir un procedimiento, evocar un conocimiento, hacer públicos procedimientos, etcétera.

lo aprendido en nuevas preguntas y de provocar el análisis de otros aspectos cada vez que se inicia la segunda fase.

Luego de diferentes juegos es pertinente considerar una nueva variable didáctica: la cantidad de preguntas. Por ejemplo: "Hoy solamente podrán hacerse cinco preguntas", o bien "hoy contaremos cuántas preguntas hacen para adivinar la figura y compararemos con la cantidad de preguntas que hicieron ayer. Vamos a ver si pueden adivinar con menos preguntas". La limitación en la cantidad de preguntas que se autorizan exige a los alumnos precisar las relaciones, incorporar vocabulario, identificar aquellas características que permitan "englobar" o "descartar" a una buena parte de la colección de figuras, etcétera.

- *Actividades de reinversión*

Posteriormente se pueden proponer actividades individuales que permitan a los alumnos reutilizar los conocimientos aprendidos. Por ejemplo: "Un nene tenía estas figuras (presentando el dibujo de una nueva colección de figuras) y no sabía en cuál había pensado su maestro. ¿Qué preguntas le convendría hacer?" o "Un chico de ese mismo grado preguntó: ¿Tiene lados redondos?, y le dijeron que no. Luego preguntó: ¿Es el redondel?, y también le dijeron que no. ¿Qué pensás de las preguntas que hizo ese chico? ¿Te parece que todas eran necesarias? ¿Por qué?". También se podría presentar una colección de figuras, dos o tres preguntas "contestadas" y que los alumnos señalen cuáles son las posibles figuras o que elaboren una nueva pregunta.

Evidentemente serán necesarios nuevos problemas que permitan a los alumnos aprender otras propiedades o reutilizar éstas en situaciones diferentes.

5.2. Construir el esqueleto de un cuerpo

Este problema está pensado para incluirse en el marco de un proyecto de enseñanza para segundo o tercer año de EGB que apunte a la conceptualización por parte de los alumnos de un conjunto de propiedades de los cuerpos geométricos.

Objetivo

El objetivo del problema es que los alumnos anticipen qué elementos precisan para realizar una construcción de un cuerpo dado identificando cantidad y variedad de aristas y cantidad de vértices.²⁰

Materiales

- Un cuerpo geométrico a modo de modelo.
- Varillas "largas" y "cortas".
- Bolitas de plastilina.
- Papel y lápiz.

Presentación del problema

Los alumnos, organizados en parejas, deben construir el esqueleto de un cuerpo. Para ello deberán solicitar varillas (aristas) y bolitas de plastilina (vértices) que utilizarán para la construcción. El pedido podrá efectuarse oralmente o por escrito (ver la segunda fase) mediante "bonos de pedido". En este problema los alumnos tienen la posibilidad de controlar por sus propios medios la validez de la anticipación realizada, cuando reciben los materiales solicitados e intentan construir el esqueleto del cuerpo.

Variables didácticas

Una de las variables didácticas de este problema es la longitud de las varillas. La diversidad de longitudes se relaciona con que para algunos cuer-

20. No hay estudios didácticos que permitan hoy día afirmar que, en relación con el estudio de los cuerpos o las figuras geométricas, uno deba preceder al otro. La tradición de empezar por cuerpos y continuar con figuras fue el producto de un aplicacionismo de resultados psicológicos a la enseñanza, problema al que se ha hecho referencia en la nota 9. Cuerpos y figuras son objetos diferentes que pueden ser estudiados en el mismo ciclo o año, independientemente del orden. Evidentemente será posible, en aquellos años en los que se estudien tanto figuras como cuerpos, presentar a los alumnos problemas que les permitan estudiar las relaciones entre ambos tipos de objetos geométricos.

pos se precisan varillas de igual longitud (por ejemplo, para armar el "esqueleto" del cubo); para otros, varillas de diferente longitud (por ejemplo, para armar ciertos prismas), y para otros casos es indistinto (por ejemplo, para armar una pirámide cualquiera).

Una segunda variable didáctica la constituye el hecho de que cada pareja de alumnos construya un cuerpo diferente (primera fase) o que todas construyan el mismo cuerpo (segunda fase). La diversidad de cuerpos a construir permite la comparación posterior, enfatizando las diferencias entre los cuerpos; en cambio, el trabajo de todos los alumnos en torno a un mismo cuerpo favorecerá la comparación de las anticipaciones realizadas y permitirá profundizar en los elementos de cada cuerpo en particular.

Otra variable didáctica la constituye el medio por el cual se realiza el pedido de materiales: en forma oral o en forma escrita a través de un "bono de pedido" (segunda fase). La exigencia de producir un registro escrito de la solicitud demanda a los alumnos la anticipación de características de los cuerpos relativas a la cantidad de aristas y vértices y a la variedad de aristas que precisan. Si el pedido se formulara oralmente, los alumnos tendrían más oportunidad de "corregir" o "completar" sus pedidos erróneos a medida que fueran construyendo el cuerpo y posiblemente se dificultaría el análisis colectivo sobre los errores. El registro escrito, por un lado, fuerza a tomar decisiones conjuntas y a explicitarlas; por el otro, permite el análisis posterior sobre la anticipación realizada.

Una última variable es la distancia entre el cuerpo geométrico y los alumnos. Cuando el cuerpo se encuentra presente y disponible para los alumnos, la identificación de aristas y vértices se apoyará fundamentalmente en el conteo realizado sobre el cuerpo. Cuando se realiza la misma actividad con el cuerpo ubicado a mayor distancia de los alumnos (por ejemplo, en el escritorio del docente) y con la restricción de que no es posible trasladarlo ni trasladarse hacia él, se promueve una cierta inhibición para realizar el conteo sobre el objeto. Será posible identificar sus elementos a partir de una representación mental del cuerpo, es decir, será necesario inferir elementos no "visibles" perceptivamente (por ejemplo, en un prisma, se mantendrán ocultos algunas aristas y vértices), pero "reconstruibles" a partir del conocimiento sobre dicho cuerpo.

Desarrollo de la actividad

La puesta en marcha de este problema exige considerar diferentes momentos de trabajo que tienden a una progresiva explicitación y descontextualización de las propiedades de los cuerpos geométricos en función de sus aristas y vértices.

- *Primera fase. Construir el esqueleto con el cuerpo "al alcance de la mano" y sin confeccionar bonos de pedido*

Los alumnos organizados en parejas deben construir el esqueleto de un cuerpo geométrico presente "al alcance de la mano" y podrán tomar libremente los materiales dispuestos en el escritorio del docente. Esta construcción inicial les permitirá realizar ajustes simultáneamente entre los materiales que eligen y los resultados que obtienen. En esta fase no es necesario que todas las parejas trabajen sobre el mismo cuerpo.

- *Segunda fase. Confección de un bono de pedido con el cuerpo presente y al "alcance de la mano"*

En esta segunda fase, nuevamente el docente presenta un cuerpo y los alumnos esta vez deben hacer un bono de pedido que presentarán al docente, a partir del cual él les entregará los materiales solicitados. Esta fase exige a los alumnos considerar la cantidad de aristas y de vértices y la variedad de aristas que precisarán para la construcción y registrar en forma escrita el pedido. Dada la cercanía del cuerpo, les es posible realizar el conteo de elementos. Es conveniente que todos los alumnos trabajen sobre el mismo cuerpo de tal manera de permitir luego la comparación de los bonos realizados y los resultados obtenidos.

En estas dos fases, la finalidad es que los alumnos comprendan la consigna del juego y se familiaricen con la situación.

- *Tercera fase. Construcción de un bono de pedido con cuerpo presente que no está "al alcance de la mano"*

Esta fase busca promover un mayor trabajo de anticipación por parte de

los alumnos. El cuerpo se encuentra ubicado a una distancia mayor que en las fases anteriores. Los alumnos no pueden acercarse a él, ni éste puede ser trasladado hacia ellos. Nuevamente deben elaborar un bono de pedido de materiales que exige ponerse de acuerdo en el pedido a realizar. La lejanía del cuerpo inhibe la posibilidad de realizar el conteo de los elementos sobre el propio objeto. Estas condiciones exigen a los alumnos evocar las características "visibles" y "no visibles" del cuerpo en cuestión.

Una vez que los alumnos reciben el material deben construir el esqueleto del cuerpo, verificando la validez de la anticipación realizada.

Al proponer en esta fase que todas las parejas trabajen sobre el mismo cuerpo geométrico, se favorece la comparación e institucionalización posterior de sus características en la fase siguiente.

- *Cuarta fase. Análisis colectivo de bonos y construcciones*

En este momento se promueve un trabajo colectivo de reflexión y sistematización acerca de los elementos necesarios para armar el cuerpo. Se comparan todos los bonos que se han confeccionado para hacer los pedidos distinguiendo aquellos que han permitido realizar la construcción –sin que sobran ni faltaran materiales– de aquellos que no lo han permitido. Se realizará un análisis acerca de las dificultades que han tenido las diferentes parejas: si han sobrado materiales o si han sido insuficientes, si no han considerado en forma correcta la longitud de las varillas, etcétera.

El docente promueve el análisis de las razones por las cuales los alumnos produjeron bonos acertados o erróneos. Por ejemplo: "¿Por qué creen que les faltaron elementos?"; "¿Algunos chicos pidieron de menos. ¿Se habrán olvidado de considerar un lado? ¿Cuál?"; "¿Pidieron todas varillas iguales? ¿Qué no tuvieron en cuenta?"; "¿Qué tuvieron en cuenta para hacer el pedido de las varillas largas? ¿Nunca sobraron?", etcétera.

Será necesario llevar adelante estas dos últimas fases de trabajo a lo largo de varias clases, para permitir a los alumnos explorar las propiedades de diferentes cuerpos. Cada vez que se reitera la cuarta fase con un nuevo cuerpo geométrico, el docente podrá proponer el registro de la

variedad y cantidad de elementos y la comparación con los elementos necesarios y suficientes para construir otros cuerpos.

Esta cuarta fase también permite instalar cierto vocabulario específico que, desde la perspectiva de los alumnos, les permitirá "entendernos mejor", "hacer bonos más claros", etcétera.

• *Actividades de reinversión*

Finalmente, se pueden plantear actividades que permitan reutilizar los conocimientos nuevos producidos a partir de estos problemas. Por ejemplo, la comparación de bonos de pedido de cuerpos diferentes. Se presentan bonos de pedido y se solicita que anticipen cuál o cuáles cuerpos será posible construir con cada pedido. Esta variante de la actividad permite, por ejemplo, considerar las similitudes y diferencias entre las varillas de prismas rectangulares y de cubos o de prismas con base triangular y base cuadrada.

Del mismo modo que ha sido señalado para los juegos de adivinación, es posible plantear a los alumnos, en forma posterior al juego, actividades de reinversión individuales escritas en las que se simula parte del juego. Por ejemplo: "Si quisiéramos armar el esqueleto de una pirámide de base cuadrada, ¿cuántas varillas largas precisarían? ¿Y cortas? ¿Cuántas bolitas de plastilina?". Será interesante discutir luego con los alumnos si era posible o no armar la pirámide con varillas del mismo tamaño. O bien: "Una pareja pidió 4 bolitas de plastilina. ¿Qué cuerpo podrá armar?". Será interesante analizar si existen una o más posibilidades.

Como ya se señaló, esta actividad se inscribe en el marco de un proyecto de enseñanza sobre los cuerpos geométricos. Será necesario continuar el estudio de éstos con problemas diferentes que pongan en juego otros conocimientos.

Por último, queremos resaltar que en este problema, si bien el objeto de estudio son las propiedades de los cuerpos, se movilizan también conocimientos ligados al quehacer matemático: la actividad anticipatoria que realizan los alumnos. Es parte del "juego" tomar decisiones y validar luego si las anticipaciones realizadas han sido o no correctas.

5.3. Copiado de una figura²¹

A continuación se presenta un nuevo problema —posible de ser abordado en tercer año de la EGB— que busca que los alumnos profundicen las relaciones entre los elementos de las figuras.

Objetivo

El objetivo de este problema es que los alumnos identifiquen relaciones entre los elementos de un rectángulo y de un cuadrado, con la finalidad de poder copiarlo.

Materiales

- Una copia del dibujo en hoja cuadriculada.
- Hojas cuadriculadas.
- Hojas blancas lisas.
- Reglas (graduada y no graduada).
- Escuadra.

Presentación del problema

El docente entrega a cada alumno una hoja con el dibujo de la página siguiente. Los niños deberán copiarlo en otra hoja de manera tal que la copia pueda superponerse con el original.

También en este problema los alumnos pueden validar por sí mismos su producción sin necesidad de la corrección por parte del docente. Por medio de la superposición a trasluz podrán darse cuenta de si han logrado o no reproducir la figura presentada. Y si no lo han logrado, podrán realizar ajustes o volver a empezar.

21. Este problema es una adaptación de los presentados para el segundo ciclo de la EGB en Sadovsky *et al.* (1998).

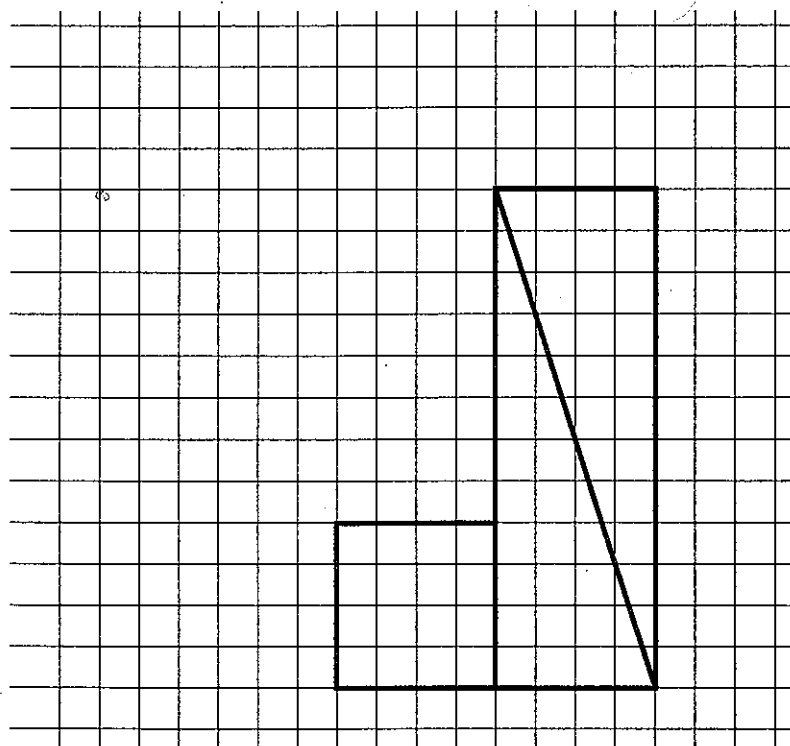


Figura 2

Variables didácticas

En este problema el dibujo está presente. No se intenta, a diferencia del problema anterior, desplegar un trabajo centrado en la anticipación, ya que con el modelo a la vista, los alumnos podrán realizar un juego de ensayos y ajustes sobre los errores.

Una variable didáctica es el dibujo que se presenta. En este caso se seleccionó un dibujo que pone en juego características del cuadrado, del rectángulo, de la diagonal, y las relaciones entre las longitudes de los lados de ambas figuras.

Otra de las variables es el tipo de hoja que se utiliza para presentar el dibujo. En este caso, se presenta el dibujo en hoja cuadrículada. Presentar el dibujo en hoja lisa promovería la necesidad de tomar medidas con la regla para trasladar cada segmento, en cambio con hoja cuadrículada es suficiente con contar los cuadraditos.

El tipo de hoja que se utiliza para copiar el dibujo constituye también una variable didáctica. Si los alumnos deben copiar la figura en una hoja cuadrículada, les será suficiente nuevamente con el conteo de cuadraditos para determinar las longitudes de los lados. Pero, lo que es mucho más importante aún, está resuelto el problema de cómo trazar perpendiculares para los ángulos de los cuadriláteros en cuestión. Si los alumnos deben realizar el copiado en hoja lisa, precisarán necesariamente usar la regla para transportar longitudes y la escuadra para trazar perpendiculares.

Los instrumentos habilitados para realizar el copiado constituyen también otra variable didáctica. En este problema, los alumnos pueden utilizar regla no graduada, regla graduada y escuadra. El tipo de instrumentos está en estrecha relación con el tipo de hoja en la que se presenta el dibujo y se exige su copiado. Como ha sido analizado anteriormente, si los alumnos tuvieran que copiar el dibujo en hoja cuadrículada, no precisarían ni de regla graduada ni de escuadra, con lo cual no se movilizarían los conocimientos sobre cómo construir un ángulo recto. Si se tratara de una hoja lisa, precisarían regla graduada para construir lados de igual medida y escuadra para construir ángulos rectos.²² La habilitación para el uso de unos u otros instrumentos modifica los conocimientos que los alumnos ponen en juego en el problema.

Desarrollo de la actividad

El trabajo en torno a este problema se organiza en varios momentos que pueden involucrar varias clases.

22. Este mismo problema, restringiendo el copiado al uso de regla no graduada y compás provoca la necesidad de construir mediatrices para el trazado de perpendiculares. Evidentemente, bajo estas condiciones, es un problema para alumnos del segundo ciclo.

- *Primera fase. Copiado de la figura (de hoja cuadriculada a hoja cuadriculada) en forma individual*

El docente entrega una copia del dibujo en hoja cuadriculada a los alumnos, quienes deben copiarlo también en una hoja cuadriculada. Pueden usar cualquier instrumento. Para realizar el copiado, los alumnos podrán contar los cuadraditos y usar la regla para trazar los lados, o bien usar la regla para medir y trazar.

Esta fase no exige explicitar las propiedades de la figura (como sucede en los ejemplos anteriores): sus características permanecen implícitas. Por ejemplo, los alumnos podrán considerar o no las relaciones entre las longitudes de los lados (de igualdad, de triple, etcétera).

- *Segunda fase. Hacia el análisis colectivo de la figura*

En la segunda fase se organiza el trabajo colectivo con el fin de que los alumnos expliciten aquellas relaciones que se han tenido en cuenta y aún no habían sido formuladas durante el copiado. Se promueve una reflexión en torno a los procedimientos de copiado, a las características que se han tenido en cuenta y a los instrumentos que se han utilizado. Al finalizar esta fase se promoverá la circulación y el registro de ciertos conocimientos:

- que el cuadrado tiene sus cuatro lados iguales;
- que el rectángulo tiene dos pares de lados opuestos iguales;
- una primera aproximación a la noción de diagonal.

- *Tercera fase. Copiado de la misma figura (de hoja cuadriculada a hoja lisa) en forma individual*

En esta fase se presenta a los alumnos el mismo dibujo. Deberán copiarlo, pero en este caso, en una hoja lisa. El tipo de hoja sobre la cual se debe realizar el copiado exige consideraciones más precisas sobre aquellas características de la figura que deben ser tenidas en cuenta para llevar a cabo la tarea. El conteo de cuadraditos, procedimiento pertinente para la primera fase, se torna insuficiente en esta instancia. De esta manera, requiere de los alumnos el uso de la regla como instrumento que permite trasladar y controlar la igualdad de los lados entre el original y la copia y, simultáneamente, la igualdad entre los lados del cuadrado y de los lados opuestos en el rectángulo.

En las fases anteriores, el papel cuadriculado permitía realizar la tarea sin considerar la perpendicularidad entre los lados. La nueva restricción (copiar en hoja lisa) enfrenta a los alumnos al problema de cómo construir dos lados perpendiculares, aunque el problema no sea enunciado así por parte de los alumnos. La escuadra será el instrumento que permitirá su resolución.

- *Cuarta fase. Análisis colectivo del problema*

Posteriormente al trabajo de copiado sobre hoja lisa desarrollado por los alumnos, se propicia un análisis colectivo de los nuevos aspectos que este problema introduce. Para el desarrollo de esta fase, el docente podrá recurrir a diferentes intervenciones. Por ejemplo: “¿Les quedaron iguales el original y la copia? ¿Cómo hicieron para que les salieran iguales?”. Se apuntará entonces a instalar la necesidad de utilizar la regla para garantizar la igualdad entre la copia y el original.

Si surgieran comentarios de los alumnos relativos a cómo la regla les permitió también controlar la igualdad entre los lados en el cuadrado y entre los lados opuestos en el rectángulo, el docente podrá hacer explícitas estas relaciones.

El docente promoverá la reflexión sobre el nuevo aspecto que este problema intenta provocar: la perpendicularidad de los lados continuos de los rectángulos y cuadrados. Para ello podrá preguntar: “¿Cómo hicieron para hacer el cuadrado ahora que no tenían los cuadraditos? ¿Cómo saben que es un cuadrado? A algunos chicos les quedó un poco torcido, ¿qué pudo haber pasado? ¿Cómo hicieron las ‘puntas’ de las figuras iguales a las del original?”, etcétera. Luego de la explicitación por parte de los alumnos de esta característica que había que considerar, y del uso de la escuadra (o de la punta de la regla usada como escuadra), el docente, con el fin de hacer circular este nuevo conocimiento, podrá instalar, por ejemplo: “Hoy aprendimos que los lados del cuadrado y del rectángulo están puestos formando una ‘ele’, y que con la escuadra podemos hacer bien su dibujo”; o bien: “Estos lados son perpendiculares, y se pueden trazar con la escuadra”, “Los lados así (mostrando los lados continuos de un cuadrado) se llaman perpendiculares y la escuadra sirve para trazarlos”, etcétera. En síntesis, se apuntará a que identifiquen esta característica de la perpendicularidad, a que conozcan su nombre “oficial” y a que reconozcan el uso de un instrumento para su trazado.

Una vez más planteamos la insuficiencia de este único copiado para el estudio de dichas propiedades. Será necesario trabajar en otras clases con el copiado de otros dibujos que pongan en juego los mismos elementos o elementos relacionados. Asimismo, será preciso incorporar otros problemas que apunten en la misma dirección.

5.4. Acerca de estas tres actividades

Los problemas analizados tienen aspectos comunes que parece interesante destacar. En primer lugar, son situaciones de enseñanza que permiten a los alumnos la utilización de sus conocimientos geométricos intuitivos como punto de partida y que, al mismo tiempo, provocan desafíos que favorecen la producción colectiva de conocimientos geométricos nuevos.

La "potencia" de estos problemas para la construcción de conocimientos geométricos no reside exclusivamente en la actividad misma que realizan los alumnos mientras los resuelven, sino también en el tipo de interacciones que permite promover en la clase con respecto a los objetos geométricos en cuestión. Se han ejemplificado intervenciones didácticas que son necesarias para generar en el aula dichas interacciones con los conocimientos.

En segundo lugar, los alumnos pueden darse cuenta de la validez de lo realizado sin necesitar la "corrección" del maestro. Han logrado o no adivinar la figura, han podido o no reproducirla, han logrado o no construir el cuerpo solicitado. Es parte del problema considerar los efectos de las acciones realizadas. La validación de la situación está prevista en los mismos problemas.²³

Ahora bien, evidentemente, dicha validación en estos problemas es empírica. Sin embargo, el tipo de actividad que exigía la resolución de cada uno de estos problemas no lo era. No se trata de una actividad perceptiva

23. A pesar de que los niños no precisen la evaluación del maestro, en el juego de adivinación puede suceder que algún niño adivine cuál es la figura elegida a pesar de no haber utilizado los nuevos conocimientos, o bien que otro niño utilice dichos conocimientos y no adivine la figura en cuestión. Otros aspectos pueden influir para determinar quién es el ganador (el orden en los turnos para realizar preguntas, la posibilidad de considerar preguntas de los otros, etcétera).

o manipulativa. Por el contrario, aunque fuertemente apoyados en dibujos de figuras geométricas o en modelos de cuerpos geométricos, exigen a los alumnos un análisis de las propiedades de cuerpos o figuras, una explicitación de dichas propiedades o una actividad anticipatoria.

Por último, reconocemos que estas actividades analizadas tienen una distancia tal con el modelo deductivo propio de la geometría euclidea que podrían hasta hacer dudar de su carácter estrictamente geométrico. Ya hemos señalado los límites del primer ciclo en dicho sentido. De todos modos, valoramos en estos problemas su posibilidad de generar una iniciación en el estudio de estos objetos tan complejos y, a la vez, de promover un tipo de actividad intelectual que sí es, sin duda, propia del quehacer matemático.

6. CONCLUSIÓN

Hemos planteado a lo largo de este capítulo la concepción de que los conocimientos geométricos de los niños son de carácter necesariamente provisorio. Es justo señalar que nuestros conocimientos didácticos sobre la enseñanza de la geometría también lo son. Desde nuestro actual estado de conocimientos, somos conscientes de haber planteado un conjunto de afirmaciones que pueden resultar controvertidas. Nuestra intención ha sido contribuir al necesario y pendiente debate.

BIBLIOGRAFÍA

- Arsac, G. (1989): "La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans", *Anales de la Conferencia PME (Psychology of Mathematics Education)*, París.
- Artigue, M. (1986): "Épistémologie et Didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 2/3. (Traducción para el Programa de Transformación de la Formación Docente, MCyE, 1993.)
- Babini, J. (1967): *Historia de las ideas modernas en matemática*, Washington, Departamento de Asuntos Científicos, OEA.
- Balacheff, N. (1987): "Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture. Le cas de la somme des angles d'un triangle", *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 39, Irem de Paris 7.

- Berthelot, R. y M.-H. Salin (1993): "La enseñanza de la geometría en la escuela primaria", *Grand N*, nº 53, Grenoble. (Traducido para el PTFD por B. Capdevielle, L. Varela y P. Willson, 1994.)
- Broitman, C. (2000): "Reflexiones en torno a la enseñanza del espacio", *De Cero a Cinco*, Buenos Aires, Novedades Educativas.
- Broitman, C. y H. Itzcovich (2001): *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en EGB*, Documento nº 3/01, Gabinete Pedagógico Curricular, Matemática, Dirección de Educación General Básica, Provincia de Buenos Aires.
- Brousseau, G. (1980-1981): "Problèmes d'enseignement des décimaux", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1-1 y 2-1, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- (1986): *Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques*, Tesis de doctorado, Université Bordeaux I.
- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas*, Buenos Aires, Paidós.
- Brousseau, G. y J. Centeno (1989): "Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11,5.
- Brun, J. (1980): "Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones", *Revista Infancia y Aprendizaje*, nº 9, Madrid.
- (1994): "Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques", en *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Castorina, J. et al. (1998): *Piaget en la educación. Debate en torno de sus aportaciones*, México, Paidós.
- Castro, A. (2000): "Actividades de exploración con cuerpos geométricos. Análisis de una propuesta de trabajo para la sala de cinco", en Malajovich, A. (comp.): *Recorridos didácticos en la educación inicial*, Buenos Aires, Paidós.
- Charnay, R. (1994): "Aprender por medio de la resolución de problemas" en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas*, Buenos Aires, Paidós.
- Chevallard, Y. (1997): *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique.
- Colinvaux, D. y C. Dibar Ure (1989): "Trabajando con adultos no alfabetizados. La construcción de la noción de espacio", en *Problemas en psicología genética*, Buenos Aires, Miño y Dávila.

- Coll, C. (1983): "Las aportaciones de la psicología a la educación. El caso de la psicología genética y de los aprendizajes escolares", en C. Coll (comp.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, Siglo XXI.
- Fregona, D. (1995a): *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*, Tesis, Université de Bordeaux I.
- Fregona, D. (1995b): *Diferentes dominios de declaración sobre las figuras*, ponencia de la IX CIAEM, Chile.
- Gálvez, G. (1985): *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*, tesis doctoral, CINVESTAV, México.
- (1994): "La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas*, Buenos Aires, Paidós.
- Laborde, C. (1990): "L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, 3.
- Lerner, D. (1996): "La enseñanza y el aprendizaje escolar", en J. A. Castorina, E. Ferreiro, D. Lerner y M. Oliveira: *Piaget-Vigotsky: contribuciones para plantear el debate*, Buenos Aires, Paidós.
- Margolinas, C. (1993): *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Parousseau, G. y J. Centeno (1989): "Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11, 5.
- Perrin Glorian, M. J. (1995): "Condicionamientos de funcionamiento de los docentes en el colegio secundario: lo que nos enseña el estudio de cursos flojos", ficha mimeografiada entregada en el Seminario de Didáctica de la Matemática de la autora, Facultad de Ciencias Exactas, UBA, 1995.
- Piaget, J. y B. Inhelder (1948): *La représentation de l'espace chez l'enfant*, París, Presses Universitaires de France.
- Piaget, J.; B. Inhelder y A. Szeminska (1973): *La géométrie spontanée de l'enfant*, París, Presses Universitaires de France.
- Sadovsky, P.; C. Parra; H. Itzcovich y C. Broitman (1998): *Documento de actualización didáctica Nº 5, Matemática, Segundo Ciclo de la EGB*, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

- (1999): *Pre Diseño Curricular, Matemática, Marco General, EGB 1 y EGB 2*, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Saiz, I. (1987): "Matemática en preescolar", en *Nuevas Ideas Matemáticas*, n° 3, Corrientes.
- (1996): "El aprendizaje de la geometría en la EGB", *Novedades Educativas*, n° 71, Buenos Aires.
- Santaló, L. (1961): *Geometrías no euclidianas*, Buenos Aires, Eudeba.
- Vergnaud, G. (1997): *Aprendizajes y didácticas: ¿qué hay de nuevo?*, Buenos Aires, Edicial.



Si desea recibir regularmente información sobre las novedades de nuestra editorial, le agradeceremos suscribirse, indicando su profesión o área de interés a:

difusion@editorialpaidos.com.ar

Periódicamente enviaremos por correo electrónico información de estricta naturaleza editorial.

Defensa 599, 1° piso. Ciudad de Buenos Aires.

Tel.: 4331 2275

www.paidosargentina.com.ar

Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB

Análisis y propuestas

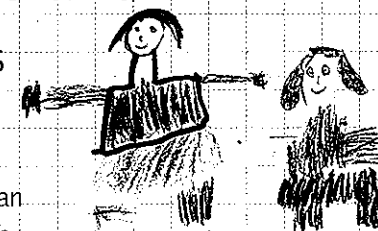
Mabel Panizza (comp.)

Olga Bartolomé / Claudia Broitman

Dilma Fregona / Horacio Itzcovich

María Emilia Quaranta / Beatriz Ressa de Moreno

Irma Elena Saiz / Paola Tarasow / Susana Wolman



La posibilidad de elegir con conocimiento de causa entre diferentes propuestas de enseñanza y disponer de elementos para analizar y mejorar la propia práctica constituye sin duda una necesidad de los docentes. El abandono de viejas prácticas de enseñanza que no se adaptan a las demandas actuales no puede realizarse por mandato, sino mediante el conocimiento de los fundamentos tanto de las propuestas que se abandonan como de los nuevos enfoques didácticos. Esta obra recoge esa necesidad y busca generar un medio de comunicación entre investigadores y educadores que permita no sólo difundir resultados, sino también interpretarlos en términos de alcances y limitaciones de modelos teóricos. Hoy parece posible, después de varios años de difusión de propuestas didácticas, promover su revisión, detectar lagunas e inconsistencias, lo que sin duda generará nuevas preguntas. Tarea que los autores emprenden, poniendo especial cuidado en articular las investigaciones presentadas con concepciones de aprendizaje y de enseñanza, así como también con propuestas para el aula del Nivel Inicial y del primer ciclo de la EGB.

Las relaciones entre objetos de conocimiento y representaciones, la adquisición del sentido en matemática, los diversos enfoques a propósito de la enseñanza del número y del sistema de numeración, las condiciones para la organización de instancias de discusión grupal en clase, son algunos de los temas que aquí se desarrollan, desplegando análisis comparativos de propuestas áulicas, análisis de situaciones didácticas y registros de clases.

El libro aborda también la finalidad de la enseñanza y los problemas de adquisición de conocimientos espaciales y geométricos –esa área de conocimiento con notables ausencias bibliográficas–, sintetizando los cuestionamientos principales a las perspectivas clásicas.

ISBN 950-12-6141-7



9 789501 261417

53041

